МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2017-2018 уч. год
10 класс
(4 часа)

1. Расположите натуральные числа от 1 до 101 в строку так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами была равна 2 или 5.
   Ответ: 101, 99, 97, …, 9, 4, 2, 7, 5, 3, 1, 6, 8, 10, …, 100.
   Замечание. Возможны и другие примеры.
   Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
   Если приведён любой верный пример – 7 баллов.
   Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
   Если верное решение – 7 баллов.

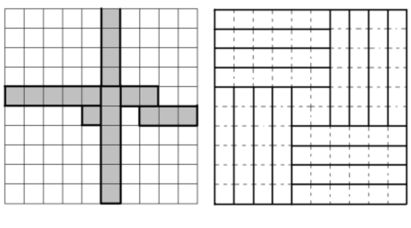
2. Сколько существует пятизначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая, третья и последняя цифры чётны?
   Ответ: 9960.
   Решение. Первая цифра числа может быть любой из четырёх (2, 4, 6 или 8), вторая и четвёртая – любой из десяти каждая, а третья и пятая, если отказаться от условия « не делящихся на тысячу», — любой из пяти (0, 2, 4, 6 или 8). Следовательно, пятизначных чисел, в записи которых первая, третья и последняя цифры чётны, всего имеется $4\times10\times5\times10\times5= 10000$; так как среди них $4\times10\times1\times1\times1= 40$ чисел делятся на 1000, то чисел, удовлетворяющих условию задачи, окажется $10000 – 40 = 9960$.
   Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
   Только верный ответ – 0 баллов.
   Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
   Если верное решение – 7 баллов.

3. Решите уравнение в целых числах: $x^2+y^2=x+y+2$.
   Ответ: (-1; 1), (-1; 0), (0; -1), (0; 2), (1; -1), (1; 2), (2; 1), (2; 0).
   Решение. Уравнение равносильно следующему: $x^2-x = -y^2+y+2$. Функция $f(x) = x^2-x = (x-0,5)^2-0,25$ принимает значения на интервале $[-0,25; +\infty)$, $g(y) = -y^2+y+2 = -(y-0,5)^2+2,25$ – на интервале $[2,25; -\infty)$, то есть общих целых значений у них всего три: 0, 1, 2. При этом, поскольку x и y – целые, $f(x)$ и $g(y)$ могут принимать только чётные значения, то есть общее значение 1 отпадает. Уравнение $f(x) = 0$ имеет корни 0 и 1, а уравнение $g(y) = 0$ имеет корни -1 и 2. Это даёт 4 пары решений. Уравнение $f(x) = 2$ имеет корни -1 и 2, а уравнение $g(y) = 2$ имеет корни 1 и 0. Это даёт ещё 4 пары решений, все из которых, очевидно, подходят.
   Критерии. *Если неверное решение или только ответ без объяснения – 0 баллов.*
   Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка, или потерян один ответ – 3 балла.
   Если верное решение – 7 баллов.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

4. Во вписанном четырёхугольнике *ABCD* выполнены равенства: *AB*=*AC* и *BC*=*CD*. Отметили точку *P* – середину дуги *CD* описанной окружности, не содержащей точку *A*, и точку *Q* – точку пересечения диагоналей *AC* и *BD*. Докажите, что прямые *PQ* и *AB* перпендикулярны.
<u>Решение.</u> Обозначим величины углов $\angle BAC$ и $\angle DAC$ за.α, а величину угла $\angle ABD$ – за β. Тогда углы $\angle DBC$ и $\angle CDB$ также равны α, а угол $\angle ACD$ равен β, как вписанные, опирающиеся на те же дуги. В силу равнобедренности треугольника *ABC* получим 180°–2α–β=α+β, откуда 3α+2β=180°. Внешний угол $\angle AQD$ треугольника *CQD* равен α+β, а угол $\angle ADB$ равен 180°–2α–β. Ввиду равенства 3α+2β=180°, эти углы равны, и треугольник *AQD* – равнобедренный. Тогда равнобедренный и подобный ему треугольник *BQC*. Точка *P* – середина дуги *CD*, значит, *AP* – биссектриса угла $\angle QAD$, а *BP* – биссектриса угла $\angle QBC$. В равнобедренном треугольнике биссектриса к основанию является высотой, поэтому в треугольнике *APB* прямые *AQ* и *BQ* являются перпендикулярами из вершин *A* и *B* соответственно к сторонам *BP* и *AP*. Значит, *P* – точка пересечения высот треугольника *ABP*, поэтому *PQ* – третья высота этого треугольника и перпендикулярна *AB*.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если доказана равнобедренность треугольников AQD и BQC – 2 балла.
Если доказана перпендикулярность AQ и BQ сторонам BP и AP – 2 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

5. В белом квадрате 10×10 первым ходом закрашивают клетчатый прямоугольник 1×1, вторым ходом – клетчатый прямоугольник 1×2, третьим – 1×3 и т.д., пока есть возможность это сделать. После какого наименьшего количества ходов этот процесс мог закончиться? *(Красить клетки повторно нельзя.)*
<u>Ответ:</u> после 6 ходов.
<u>Решение</u>. Оценка. На доске можно выделить 16 прямоугольников 1×6, из которых максимум 1+2+3+4+5=15 будут содержать закрашенные клетки, значит, всегда можно сделать шестой ход. Пример. На рисунке приведён пример процесса, когда седьмой ход сделать уже нельзя.



Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если только верный пример – 3 балла.
Если только верная оценка – 3 балла.
Если верное решение (любой правильный пример и обоснование оценки) – 7 баллов.