Ставропольский край

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников

2017/2018 учебного года

Математика

10 класс

1. Графики функций $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ пересекаются в точке с координатами (1, 1). Сравните $a^5 + d^6$ и $c^6 - b^5$.

Решение

Так как графики проходят через точку (1, 1), то $1 = 1 + a + b$ и $1 = 1 + c + d$, то есть $a = -b$ и $c = -d$. Следовательно, $a^5 = -b^5$ и $d^6 = c^6$. Складывая эти равенства, получим $a^5 + d^6 = c^6 - b^5$.

Ответ эти числа равны.

2. Пройдя $^4/_9$ длины моста, путник заметил, что его догоняет машина, еще не въехавшая на мост. Тогда он повернул назад и встретился с ней у начала моста. Если бы он продолжил свое движение, то машина догнала бы его у конца моста. Найдите отношение скоростей машины и путника.

Решение

Из условия следует, что время, которое требуется машине, чтобы подъехать к мосту, равно времени, которое требуется путнику, чтобы пройти $^4/_9$ моста. Следовательно, если путник продолжит движение, то к моменту въезда машины на мост, он пройдет $^8/_9$ моста. Значит, за то время, пока машина проезжает мост, путник успевает пройти его девятую часть, поэтому скорость машины в 9 раз больше скорости путника.

Ответ 9.

3. M – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$. На основании BC выбрана такая точка P, что $\angle APM = \angle DPM$. Докажите, что расстояние от точки C до прямой AP равно расстоянию от точки B до прямой DP.

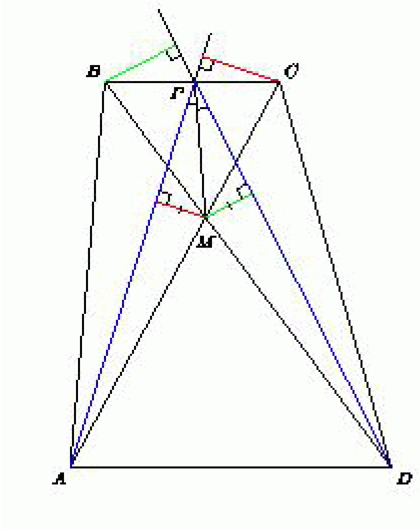
Решение

Будем обозначать расстояние от точки X до прямой l через $d(X, l)$.

Заметим, что $d(C, AP) = d(M, AP)\cdot {}^{AC}/_{AM}$, $d(B, DP) = d(M, DP)\cdot {}^{DB}/_{DM}$.

Но $d(M, AP) = d(M, DP)$, так как PM – биссектриса угла APD.

С другой стороны, из подобия треугольников BMC и DMA следует, что $AM : MC = DM : MB$. Значит, $AC : AM = DB : DM$. Отсюда следует утверждение задачи.



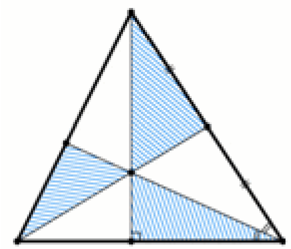
4. Вовочка играет в компьютерную игру. Если он наберет менее 1000 очков, то компьютер добавит ему 20% от его результата. Если он наберет от 1000 до 2000 очков, то компьютер добавит ему 20% от первой тысячи очков и 30% от оставшегося количества очков. Если Петя наберет более 2000 очков, то компьютер добавит ему 20% от первой тысячи очков, 30% от второй тысячи и 50% от оставшегося количества. Сколько призовых очков получил Петя, если по окончании игры у него было 2370 очков?

Решение

Ясно, что Петя набрал больше 1000 очков (иначе его результат был бы не больше 1200) и меньше 2000 (иначе результат был бы не меньше 2500). Отбросим 1200 очков (первую тысячу плюс приз за нее). Оставшиеся 1170 очков составляют 130% от очков, набранных Петей во второй тысяче. ${}^{3}/_{13}$ от этого количества, то есть 270 очков – приз. А общее количество призовых очков равно $200 + 270 = 470$.

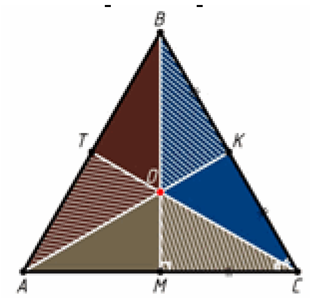
Ответ 470 очков.

5. Биссектриса, медиана и высота некоторого треугольника, проведённые из трёх разных вершин, пересекаются в одной точке и делят этот треугольник на шесть треугольников (см. рисунок). Площади трёх закрашенных треугольников равны. Верно ли, что исходный треугольник равносторонний?



Решение

Пусть медиана AK, высота BM и биссектриса CT треугольника ABC пересекаются в точке O. Треугольники BOK и COK равновелики, так как у них равные основания ($BK = CK$) и общая высота. $S_{COK} = ½\ CK·CO \sin\angle OCK$, $S_{COM} = ½\ CK·CO \sin\angle OCM$, а так как $S_{COK} = S_{BOK} = S_{COM}$ и $\angle OCK = \angle OCM$, то $CM = CK$, поэтому треугольники COK и COM равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\angle OKC = \angle OMC = 90°$, значит, медиана AK треугольника ABC является также его высотой, поэтому треугольник ABC – равнобедренный. Кроме того, из равенства $CM = CK = ½BC$ следует, что в прямоугольном треугольнике BCM катет CM вдвое меньше гипотенузы BC, значит, $\angle BCM = 60°$. Таким образом, один из углов равнобедренного треугольника ABC равен 60°. Следовательно, этот треугольник – равносторонний.



Ответ верно.