10 класс

1. Известно, что последовательность чисел $a_1, a_2,, \ldots$, является арифметической прогрессией, а последовательность чисел a_1a_2, a_2a_3, $a_3a_4\ldots$, геометрической прогрессией. Известно, что $a_1=1$. Найдите a_{2017}.

Трунов К.В.

2. Докажите, что для любых различных простых чисел p,q,t число $2016^p+2017^q+2018^t$ является составным.

Трунов К.В.

3. Найдите количество троек натуральных чисел a, b и c не превосходящих 2017 таких, что многочлен $x^{11}+ax^7+bx^3+c$ имеет рациональный корень.

Трунов К.В.

4. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке O. Отрезки OA, OB, OC и OD пересекаются с окружностью в точках K, L, M и N соответственно. P - точка пересечения диагоналей четырехугольника $KLMN$, Q - середина отрезка KL. Докажите, что прямые PQ и MN перпендикулярны.

Исаев К.П.

5. Фёдор начинает выписывать на доску пары натуральных чисел (a,b), где $a<b$ и каждое не превосходит 2018. Причем, если на доске уже выписана пара чисел (a,b), то он не может выписать любую пару вида (c,a) или (b,d). Какое наибольшее количество пар чисел он сможет написать на доске.

Трунов К.В.

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

10 класс

1. Известно, что последовательность чисел $a_1,a_2,,\dots,$ является арифметической прогрессией, а последовательность чисел $a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4\dots,$ геометрической прогрессией. Известно, что a_1=1. Найдите a_{2017}.

Ответ: a_{2017}=1;

Трунов К.В.

Решение:

Так как последовательность чисел a_1a_2, a_2a_3, $a_3a_4\dots$, является геометрической прогрессией, то $(a_na_{n+1})^2=(a_{n-1}a_n)(a_{n+1}a_{n+2})$ для $n\geq 2$. Откуда получаем, что $a_na_{n+1}=a_{n-1}a_{n+2}$ ($a_n\neq 0$ для любого n, иначе геометрическая прогрессия содержала бы бесконечное число нулей, тогда в арифметической прогресии $a_1,a_2,,\dots,$ бесконечно много нулей, чего не может быть). Так как $a_1,a_2,,\dots,$ является арифметической прогрессией, то

$a_na_{n+1}=a_{n-1}a_{n+2}$ запишем в виде $a_n(a_n+d)=(a_n-d)(a_n+2d) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_n^2+a_nd=a_n^2+a_nd-2d^2 \Leftrightarrow -2d^2=0 \Leftrightarrow d=0 \Rightarrow a_{2017}=1$.

Рекомендации по проверке.
Указан только ответ без обоснования – 0 баллов.

2. Докажите, что для любых различных простых чисел *p,q,t* число $2016^p+2017^q+2018^t$ является составным.

Трунов К.В.

Решение:
Так как p,q,t различные простые числа, то ровно одно из них может равняться 2, а остальные нечетные простые числа.
1) Пусть t - нечетное простое число, тогда получаем , что $2016\equiv 0 \pmod 3$, $2017\equiv 1 \pmod 3$, $2018\equiv -1 \pmod 3$ $\Rightarrow$ $2016^p\equiv 0 \pmod 3$, $2017^q\equiv 1 \pmod 3$, $2018^t\equiv -1 \pmod 3$ $\Rightarrow$ $2016^p+2017^q+2018^t\equiv 0 \pmod 3$. Следовательно число $2016^p+2017^q+2018^t>3$ имеет делитель равный 3.
2) Пусть $t=2$, тогда p,q – нечетные, тогда $2016\equiv -1 \pmod{2017}$, $2017\equiv 0 \pmod{2017}$, $2018\equiv 1 \pmod{2017}$ $\Rightarrow$ $2016^p\equiv -1 \pmod{2017}$, $2017^q\equiv 0 \pmod{2017}$, $2018^t\equiv 1 \pmod{2017}$ $\Rightarrow$ $2016^p+2017^q+2018^t\equiv 0 \pmod{2017}$. Следовательно число $2016^p+2017^q+2018^t>2017$ имеет делитель равный 2017.

Рекомендации по проверке.
Рассмотрен один из случаев – 3 балла.

Замечание: если $p=t=2$, $q=3$, то число $2016^p+2017^q+2018^t$ является простым.

3. Найдите количество троек натуральных чисел *a, b* и *c* не превосходящих 2017 таких, что многочлен $x^{11}+ax^7+bx^3+c$ имеет рациональный корень.

Трунов К.В.

Ответ: 2031120

Решение: Так как все коэффициенты многочлена натуральные и старший коэффициент равен 1, то любой рациональный корень является целым.

Заметим, что при x≥0 $x^{11}+ax^7+bx^3+c \ge c \ge 1$. Значит, при x≥0 целых коней нет. Если x≤-2, то $x^{11}+ax^7+bx^3+c \le -2^{11}-2^7a-2^3b+c \le -2^{11}-2^7-2^3+2017<0$, значит при x≤-2 целых коней нет. Значит только x=-1, может являться целым корнем многочлена $x^{11}+ax^7+bx^3+c$, а x=-1 является корнем многочлена при выполнении условия $-1-a-b+c=0 \Rightarrow c=1+a+b$. Так как a, b и c натуральные и не превосходят 2017 , то a может принимать значения от 1 до 2015 при этом для a=1 b может принимать значения от 1 до 2015, для a=2 b может принимать значения от 1 до 2014, …, для a=2015 b может принимать только значение 1. Значит всего таких троек 1+2+3+4+…+2015=$\frac{1+2015}{2}\cdot 2015=2031120$

Рекомендации по проверке.

Доказано, что все рациональные корни целые -1 балл.

Доказано, что x≥0 целых корней нет – +1 балл.

Доказано, что при x≤-2 целых коней нет – +3 балла.

4. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке O. Отрезки OA, OB, OC и OD пересекаются с окружностью в точках K, L, M и N соответственно. P - точка пересечения диагоналей четырехугольника $KLMN$, Q - середина отрезка KL. Докажите, что прямые PQ и MN перпендикулярны.

Исаев К.П.

Решение.

KO – биссектриса $\angle LKN$, LO – биссектриса $\angle KLM$. Следовательно, $\angle KOL = 180^\circ - \angle LKO - \angle KLO = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle LKN + \angle KLM)$.

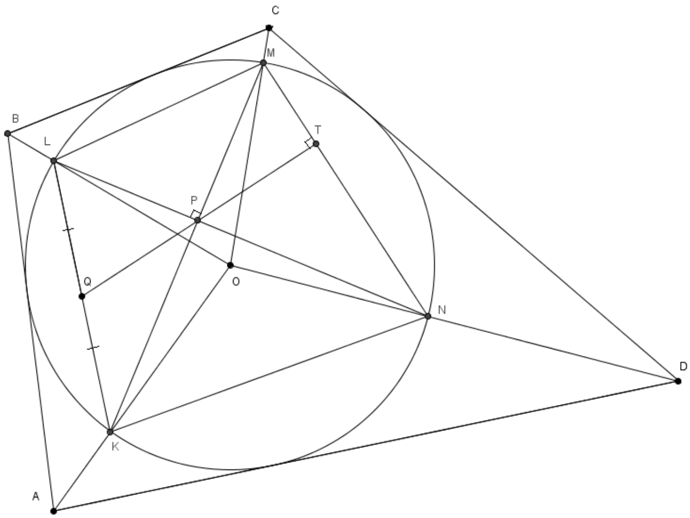
Аналогично, $\angle MON = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle LMN + \angle KNM)$.

Тогда $\angle KOL + \angle MON = 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle LKN + \angle KLM + \angle LMN +$
$+\angle KNM) = 180^\circ$.

$\angle KNL + \angle MKN = \frac{1}{2}(\angle KOL + \angle MON) = 90^\circ \Rightarrow KM \perp LN$.

Пусть $(PQ) \cap (MN) = T$.

PQ – медиана, опущенная из вершины прямого угла ΔKPL $\Rightarrow LQ = QP$
$\Rightarrow\ \Delta LQP$ – равнобедренный $\Rightarrow\ \angle QLP = \angle QPL = \angle NPT$.
$\angle LKM = \angle LNM$ (опираются на одну дугу).
Значит, $\angle NPT + \angle LNM = \angle QLP + \angle LKM = 90^{\circ} \Rightarrow\ \angle PTN = 90^{\circ}$
$\Rightarrow PQ \perp MN$.



Рекомендации по проверке.
Доказано, что $\angle KOL + \angle MON = \angle LOM + \angle KON = 180^{\circ}$ - 2 балла.
Доказано, что $KM \perp LN$ - 3 балла.

5. **Фёдор начинает выписывать на доску пары натуральных чисел (*a*,*b*), где *a*<*b* и каждое не превосходит 2018. Причем, если на доске уже выписана пара чисел (*a*,*b*), то он не может выписать любую пару вида (*c*,*a*) или (*b*,*d*). Какое наибольшее количество пар чисел он сможет написать на доске.**

Трунов К.В.

Ответ: 1009^2=1018081.

Решение: Пусть А множество всех первых чисел в паре, В множество всех вторых чисел пар. Тогда из условия задачи следует, что

A$\cap$B=$\varnothing$. Пусть в множестве A - n элементов, а в B - k элементов. Тогда $n+k\leq 2018$. Тогда в любой паре чисел, меньшее число может встретиться не более k раз, а большее число не более n раз. Поэтому число выписанных на доске чисел не превосходит

$$nk \leq n(2018-n) \leq \frac{(n+2018-n)^2}{4} = \frac{2018^2}{4} = 1009^2 .$$

Пример: (1,1010), (2,1010), …,(1009,1010), (1,1011), (2,1011),…, (1009,1011),…, (1,2018),(2,2018), …,(1009,2018).

Рекомендации по проверке.

Пример -3 балла.

Только оценка -4 балла.