Математика, 10 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При проверке работ следует руководствоваться следующими важными принципами:

1. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.
2. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты.
3. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.
4. Недопустимо выставлять баллы «за старание участника», в том числе за запись в работе сколь угодно большого по объему текста, не содержащего полезных продвижений в решении задачи.
5. При проверке результата выполнения каждого задания в работе участника олимпиады более высоким приоритетом обладают критерии оценки конкретного задания, приведенные в материалах для жюри.
6. Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Решения и указания по проверке

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы), за отличие от приведенных ниже возможных вариантов рассуждений. ***При этом оценка «7 баллов» ставится за любое верное (!) решение.***

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

1. В какой момент после полудня часовая и минутная стрелки впервые образуют прямой угол?

<u>Ответ:</u> 180/11 минут = 16 4/11 минут.

Решение:

Часовая стрелка делает 1 оборот за 12 часов, а минутная за это же время сделает 12 оборотов. Поэтому минутная стрелка движется в 12 раз быстрее. Будем все измерять в минутах, тогда прямой угол соответствует 15 минутам. Пусть часовая и минутная стрелки образуют прямой угол в момент t – за это время минутная стрелка пройдет «расстояние» (угол) t, а часовая в 12 раз меньше. Поэтому условие задачи можно записать в таком виде:

$t - t/12 = 15$, тогда $t = 180/11$ минут.

<u>Критерии:</u>

Верный точный ответ (без заявлений в духе «приближенно 16 минут») – 2 балла.

Верно записанное уравнение на углы (из соотношения скоростей или аналогичных соображений) – еще 3 балла.

Полностью верное решение – 7 баллов.

2. Каждая грань прямоугольного параллелепипеда 3×4×5 разделена на единичные квадратики. Можно ли вписать во все квадратики по числу так, чтобы сумма чисел в каждом клеточном кольце ширины 1, опоясывающем параллелепипед, была равна 120?

<u>Ответ:</u> можно.

Решение:

Приведем пример. Во все квадратики (двух) граней 3×4 запишем число 5, во все квадратики (двух) граней 3×5 запишем число 8, во все квадратики (двух) граней 4×5 запишем число 9. Проверка: сумма чисел в каждом клеточном кольце проходящем через ребра длины 3 равна $(4\times5+5\times8)\times2 = 120$, сумма чисел в каждом клеточном кольце проходящем через ребра длины 4 равна $(3\times5+5\times9)\times2 = 120$, сумма чисел в каждом клеточном кольце проходящем через ребра длины 5 равна $(3\times8+4\times9)\times2 = 120$.

<u>Критерии:</u>

Приведенный пример – не единственный.

Ответ без примера 0 баллов, ответ с правильным примером, но без проверки – 5 баллов.

Составлена система уравнений (из которой следует правильный пример), но не решена, 3 балла.

3. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = x - 1$ и $f(x) = 2 - 2x$ имеет ровно по одному решению. Докажите, что трехчлен $f(x)$ не имеет корней.

Решение:

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Уравнения из условия задачи можно преобразовать (перенести в левую часть уравнения, сгруппировать) к такому виду: $ax^2 + (b - 1)x + (c + 1) = 0$ и $ax^2 + (b + 2)x + (c - 2) = 0$.

Из условия следует, что их дискриминанты равны 0: $D_1 = (b - 1)^2 - 4a(c + 1) = 0$, аналогично $D_2 = (b + 2)^2 - 4a(c - 2) = 0$.

Если умножить D_1 на 2, сложить с D_2, а результат поделить на 3,

то получим $b^2 - 4ac + 2 = 0$, откуда $b^2 - 4ac = -2$,

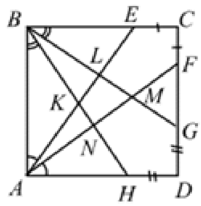
а значит уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет отрицательный дискриминант, поэтому не имеет действительных корней.

Критерии:

Верно записаны условия на равенство нулю каждого из дискриминантов – 2 балла.

4. В квадрате $ABCD$ на стороне BC взята точка E, на стороне CD – точки F и G (точка F между C и G), на стороне AD – точка H. При этом $CE = CF$, $DG = DH$. Докажите, что вокруг четырехугольника, образованного пересечением углов HBG и EAF, можно описать окружность.

Решение:



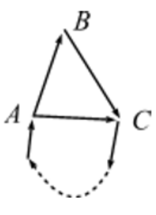
Обозначим вершины четырехугольника, образованного пересечением углов HBG и EAF, через K, L, M, N (см. рисунок справа). Прямоугольные треугольники ABE и ADF, а также BAH и BCG попарно равны по двум катетам. В первой паре треугольников углы при вершине A обозначим α, во второй паре треугольников углы при вершине B обозначим β. Тогда угол при вершине K треугольника AKB равен $180^\circ - (\alpha + \beta)$, он же является углом при вершине K четырехугольника $KLMN$. Угол M треугольника FMG равен $180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha+\beta$, он же является углом при вершине M четырехугольника $KLMN$. Тогда сумма противоположных углов четырехугольника $KLMN$ равна 180°, откуда и следует утверждение задачи.

Критерии:

Доказано равенство углов BAE и DAF, а также ABH и CBG – 1 балл.

5. В государстве некоторые города связаны дорогами, причем какие-то три города связаны дорогами каждый с каждым. На всех дорогах ввели одностороннее движение, но так, что из любого города можно проехать в любой другой. Докажите, что в этом государстве найдется замкнутый маршрут, состоящий из нечетного числа дорог.

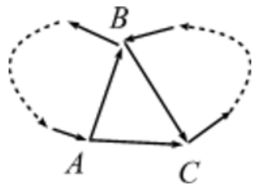
Решение:



Рассмотрим три дороги, соединяющие три города из условия задачи. Если при введении одностороннего движения они уже образуют цикл из 3 городов, то все доказано. Если это не так, то из какого-то города выходят дороги в два других города (обозначим этот город буквой A, а из него пусть выходят дороги в B и C). При этом между городами B и C тоже есть дорога, которая после введения одностороннего движения идет в какую-то сторону (без ограничения общности можно считать, что из B в C).

Таким образом, из города А в город С уже есть два пути: длины 1 (А→С) и длины 2 (А→В→С) – воспользуемся этим в дальнейшем решении. По условию задачи из города С в город А есть путь. Возможны два варианта.

Вариант 1: этот путь (из С в А) не проходит через В (рисунок слева). Если этот путь имеет четную длину, то добавим к этому пути дорогу А→С – получим замкнутый маршрут нечетной длины. Если же путь из С в А имеет нечетную длину, то добавим две дороги А→В→С – и в этом случае получим замкнутый маршрут нечетной длины.



Вариант 2: этот путь (из С в А) проходит через В (рисунок справа). Если участок пути от С до В имеет четную длину, то добавим дорогу В→С – получим путь от С до В и потом в С – замкнутый путь нечетной длины. Аналогично для случая, если путь из В в А имеет четную длину (тогда добавим дорогу от А до В и снова получим замкнутый путь нечетной длины). Если же и путь из С в В, и путь из В в А оба имеют нечетную длину, то добавим к этим двум путям дорогу А→С – получится замкнутый путь (из С в В, потом из В в А и дорога из А в С) нечетной длины (четная длина + четная + 1 дорога).

Критерии:

Верно (полностью) разобран только один случай из двух – ставить 3 балла.
Верно разобраны оба случая – 7 баллов.
Частные случаи и примеры в баллах не оцениваются.