Ключи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике
2017-2018 учебный год
11 класс
Максимально возможное количество баллов за каждое задание: 7 баллов
Максимально возможное количество баллов за работу: 35 баллов

Критерии оценивания заданий:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1. Найдите наибольшее значение выражения $a^3b - b^3a$, если $a^2 + b^2 = 1$.

Ответ. $\frac{1}{4}$

Решение.

1 способ.

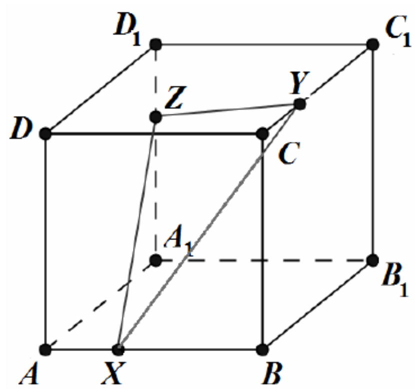
Так как $a^2 + b^2 = 1$, то существует число α, такое что $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$. Тогда $a^3b - b^3a = ab\,(a^2 - b^2) = \cos\alpha\,\sin\alpha\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}\sin2\alpha\,\cos2\alpha = \frac{1}{4}\sin4\alpha$. Наибольшее значение этого выражения равно $\frac{1}{4}$ и достигается, например, при $\alpha=\frac{\pi}{8}$.

2 способ.

Пусть $C= a^3b - b^3a = ab\,(a^2 - b^2)$. Квадрат этого выражения равен $C^2 = a^2b^2\,(a^4 + b^4 - 2a^2b^2) = a^2b^2\,((a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2) = a^2b^2\,(1 - 4a^2b^2)$.

Положим $x = 4a^2b^2$. Тогда $C^2 = \frac{x(x-1)}{4}$. Максимум выражения $x(1-x)$ равен $\frac{1}{4}$ и достигается при $x=\frac{1}{2}$. Тогда наибольшее значение C^2 равно $\frac{1}{16}$. Заметим, что множество значений C симметрично относительно нуля, так как если переставить местами значения a и b, то значение выражения изменится на противоположное. Поэтому наибольшее значение C равно $\frac{1}{4}$.

Задача 2. Петя на ребре AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отметил точку X, делящую ребро AB в отношении 1:2, считая от вершины A. Приведите пример, как Петя может отметить на ребрах CC_1 и A_1D_1 соответственно точки Y и Z, чтобы треугольник XYZ был равносторонним. Ответ обоснуйте.



Решение.

Отметим точки Y и Z так, что $A_1Z:ZD_1 = 2:1$, $C_1Y: YC = 2:1$. Равенство сторон треугольника XYZ следует, например, из равенства ломаных XAA_1Z, ZD_1C_1Y и $YCBX$.

Пусть, а – длина ребра данного куба. Тогда звенья ломаных равны

$XA = ZD_1 = YC = \frac{a}{3}$,

$AA_1 = D_1C_1 = CB = a$,

$A_1Z = C_1Y = BX = \frac{2a}{3}$.

Из равенства треугольников $\Delta XBC = \Delta YC_1D_1 = \Delta ZA_1A$ (прямоугольные треугольники с равными катетами) следует, что $XC=YD_1=ZA$. Ребро CC_1 перпендикулярно грани ABCD, значит $\angle XCY = 90^o$, т.е. Δ XCY – прямоугольный. Аналогично прямоугольными являются треугольники YD_1Z, ZAX.

Из равенства треугольников $\Delta XCY = \Delta YD_1Z = \Delta ZAX$ (прямоугольные треугольники с равными катетами) следует, что XY = YZ = ZX.

Замечания.

1. Стороны ΔXYZ – диагонали равных прямоугольных параллелепипедов с ребрами *a, a/3* и *2a/3*, где *a* – длина ребра данного куба. Их длины можно вычислить, используя пространственную теорему Пифагора.
2. Точки X, Y и Z переходят друг в друга при повороте куба на 120^o вокруг диагонали B_1D.

Критерии проверки.

- Любое полное верное решение (приведен верный пример расположения точек, и доказано, что условие задачи выполнено) – 7 баллов
- В целом верное решение, содержащее пробелы в обосновании, - 5-6 баллов. Например,. если не доказано, что из равенства ломаных следует равенство сторон треугольника – 5 баллов.
- Верно указаны точки, но не доказано, что полученный треугольник равносторонний, - 3 балла.
- Некоторые разумные идеи, не приведшие к верному решению – 1 балл.
- Только верный ответ – 0 баллов.

Задача 3. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке 1×1 которого нарисована одна из четырёх стрелок (вверх, вниз, вправо, влево). Верхняя сторона правой верхней клетки – выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелкой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90° по часовой стрелке. Если фишка должна сделать ход, выводящий ее за пределы квадрата 8×8, она остается на месте, а стрелка также поворачивается на 90° по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

Решение

Предположим, что фишка никогда не выйдет из лабиринта. Тогда на клетку с номером 1 (см. рис.) фишка попадет конечное число раз (менее четырёх), так как в противном случае, когда стрелка покажет на выход, фишка из лабиринта уйдет.

8	7	6	5	4	3	2	1
9	8	7	6	5	4	3	2
10	9	8	7	6	5	4	3
11	10	9	8	7	6	5	4
12	11	10	9	8	7	6	5
13	12	11	10	9	8	7	6
14	13	12	11	10	9	8	7
15	14	13	12	11	10	9	8

Аналогично получаем, что после того, как фишка в последний раз побывает на поле 1, она конечное число раз побывает на полях с номером 2.

Продолжая рассуждения, получаем, что после того, как фишка в последний раз побывала на полях с номерами k, $1 \le k \le 14$, она конечное число раз побывает на каждом поле с номером $k+1$. Значит, на каждом поле фишка побывает конечное число раз, что противоречит неограниченности числа ходов. Следовательно, фишка должна выйти из лабиринта.

Задача 4. В равенстве x5+ 2x + 3 = pk числа x и k – натуральные. Может ли число p быть простым?

Ответ: Не может.

Решение

Заметим, что x5 + 2x + 3 = (x + 1) (x4 – x3 + x2 – x + 3). При этом оба множителя больше единицы, а второй не меньше первого.

Если число p – простое, то x + 1 = pa, x4 – x3 + x2 – x + 3 = pb, где a и b – натуральные числа и b ≥ a.

Тогда x4 – x3 + x2 – x + 3 делится на x+1. Значит, остаток от деления многочлена P(x) = x4 – x3 + x2 – x + 3 на x + 1 делится на x + 1. По теореме Безу этот остаток равен P (–1) = 7. Следовательно, 7 делится на x + 1, то есть x = 6.

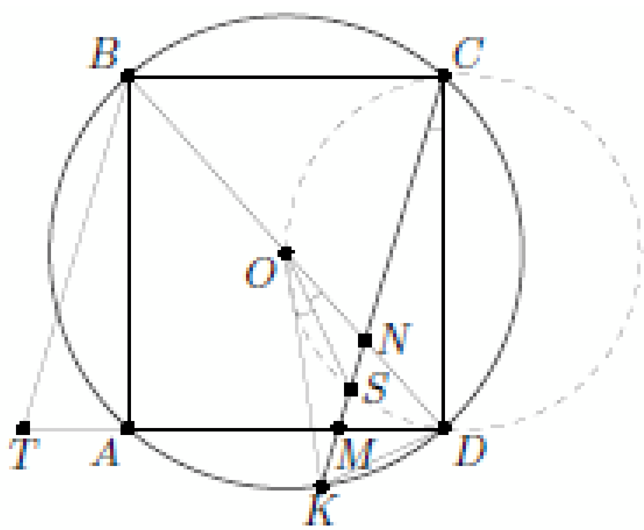
Подставив x = 6 в исходное равенство, получим: 7791 = pk. Но число 7791 не является степенью простого числа (оно делится на 3, но не делится на 9).

Задача 5. На окружности, описанной около прямоугольника ABCD, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в такой точке M, что AM: MD = 2. Пусть O – центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD.

Решение

Отметим на продолжении отрезка AD такую точку T, что AT = DM. Тогда BCMT – параллелограмм. Поскольку DT = DA + AT = 3DM + DM = 4DM, то по теореме Фалеса прямая CM пересекает отрезок BD в такой точке N, что DB = 4DN.

Значит, DN = NO, то есть KN – медиана треугольника OKD.



Точка S пересечения медиан равнобедренного треугольника OKD лежит на биссектрисе угла KOD. ∠SCD = ∠KCD = ½∠KOD = ∠SOD. Это и означает, что точки S, D, O, C лежат на одной окружности.