МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

Государственное бюджетное учреждение
дополнительного образования
Краснодарского края
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОДАРЕННОСТИ»

350000 г. Краснодар,
ул. Красная, 76
тел. 259-84-01
E-mail: cro.krd@mail.ru

Всероссийская олимпиада школьников по математике

2017-2018 учебный год

Муниципальный этап

11 класс, задания

Председатель предметно-методической комиссии: Гайденко С.В., к.ф.-м.н., доцент

1. Какое наибольшее значение может принимать сумма косинусов всех углов равнобедренного треугольника?

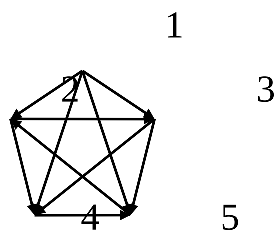
Решение. Пусть α – острый угол равнобедренного треугольника, $0 < \alpha < \pi/2$.

$2\cos\alpha + \cos(\pi - 2\alpha) = -2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha + 1$. При $\cos\alpha = 1/2$ этот квадратный трехчлен принимает наибольшее значение, равное 1,5.

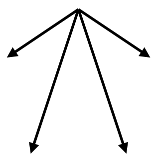
Комментарий. Необоснованный ответ оценивается в 0 баллов. Должен быть анализ квадратного трехчлена с указанием абсциссы вершины параболы.

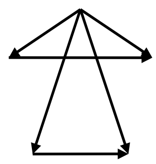
2. В соревнованиях по волейболу, где не бывает ничьих, участвует 5 команд. Все команды сыграли друг с другом. Команда, занявшая 1 место, выиграла все встречи, ровно по две победы одержали только команды, занявшие второе и третье место. В случае равенства очков место определяется по результату встречи между командами. Сколько побед одержала команда, занявшая последнее место? Определите, кто у кого выиграл.

Решение. Обозначим команду точкой. Если команда А выиграла у команды В, проведем линию со стрелкой от А к В.

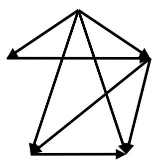


Число исходящих стрелок равно числу побед. Всего стрелок на пяти точках можно провести 10, т.е. 10 встреч было проведено. Первая, вторая и третья команда в сумме одержали 8 побед. На долю четвертой и пятой осталось 2 победы. Так как только вторая и третья команда одержали по две победы, то четвертая и пятая одержали по одной победе. Так как при равенстве очков более высокое место определяется победой в личной встрече, то вторая команда победила третью, а четвертая – пятую.

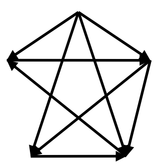




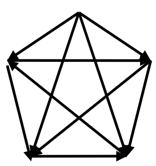
Третья команда одержала две победы, значит, она выиграла у четвертой и пятой.



Пятая команда одержала единственную победу над второй.



Осталась одна стрелка.



Комментарий. Просто правильный ответ оценивается в 3 балла. Последующие баллы начисляются с учетом полноты обоснования ответа.

3. Длины диагоналей ромба и длина его стороны образуют геометрическую прогрессию. Найдите синус угла между стороной ромба и его большей диагональю, если известно, что он больше 1/2.

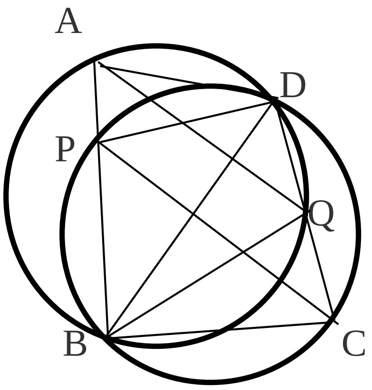
Решение. Пусть $2b$ – большая диагональ, $2a$ – меньшая диагональ, c – сторона ромба. Синус искомого угла $\frac{a}{c} > \frac{1}{2}$, то есть $c < 2a < 2b$. Тем самым определен порядок следования членов геометрической прогрессии. По свойству геометрической прогрессии $(2a)^2 = 2bc$. По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. Из этой системы двух уравнений находим $\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}$.

4. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n принято обозначать n! (читается “ n – факториал”). Какое из чисел больше 200! или 100^{200} ?

Решение. Докажем, что $200! < 100^{200}$, для чего разобьем сомножители слева на четверки вида $k(101-k)(100+\ k)(201-k)$ для $k = 1,2,\dots,50$ и каждую четверку сравним с 100^4: $(k^2-101k)(k^2-101k-20100) < 100^4$. Переменная $t = (k^2-101k)$ при $k = 1,2,\dots,50$ монотонно убывает от -100 до -2550, неравенство $t^2 - 20100t - 100^4 < 0$ при таких значениях t выполнено: квадратный трехчлен здесь убывает и в концевых точках принимает отрицательные значения.

5. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* на сторонах *AB* и *CD* расположены точки *P* и Q соответственно. Известно, что *AQ* ∥ *CP*, *BQ* ∥ *DP*, *AB*⊥ *BC* и *CD*⊥ *DP*. Докажите, что *AB* ⊥ *AD*.

Решение. Так как *AQ* ∥ *CP*, то соответственные углы *BAQ* и *BPC* равны (секущая *AB*). Так как по условию ∠*PBC*= ∠*CDP*=90° , то четырёхугольник *BPDC* вписан в окружность (с диаметром *PC*). Вписанные в эту окружность углы *BPC* и *BDC* равны (опираются на одну и ту же дугу). Поэтому получаем, что ∠*BDQ*= ∠*BDC*= ∠*BPC*= ∠*BAQ*. Из равенства углов *BDQ* и *BAQ* следует, что четырёхугольник $BADQ$ является вписанным в некоторую окружность Ω. Так как $BQ \parallel DP$ и $CD \perp DP$, то $CD \perp BQ$, то есть вписанный в Ω угол BQD является прямым. Поэтому BD – диаметр окружности Ω. Но вписанный в Ω угол BAD тоже опирается на BD, а значит $\angle BAD = 90°$ и $AB \perp AD$.



Комментарий. Доказано, что четырёхугольник BPDC вписанный (достаточно ссылки на ∠PBC +∠ CDP=180) и показано, что ∠BAQ= ∠BPC=∠ BDQ, других продвижений нет- 3 балла. Доказано, что четырёхугольник BADQ вписанный (достаточно обоснованно получить, что ∠BDQ=∠BAQ), других продвижений нет – 5 баллов.