11-й класс

11.1 Докажите, что из двух чисел $a = |\cos x - \sin x|$, $b = |\cos x + \sin x|$ хотя бы одно не меньше 1.

Решение: Например,

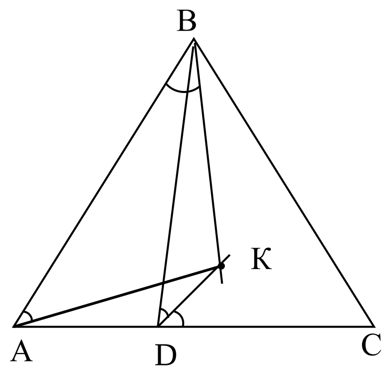
$a^2 + b^2 = \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x =$

$= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2.$

Поэтому среди чисел $a \ge 0$ и $b \ge 0$ есть не меньшее 1.

11.2 Точка D находится на стороне AC треугольника ABC. При этом $\angle BDC = \angle ABC$. Биссектрисы углов ABC и BDC пересекаются в точке K. Докажите, что $AK = BK$.

Решение: См.рис.



Пусть $\angle ABC = 2\beta$. Тогда $\angle ABK = \beta$, $\angle CDK = \beta$, $\angle ADK = 180^\circ - \angle CDK = 180^\circ - \beta$. Рассмотрим четырехугольник ADKB. В нем сумма противоположных углов ABK и ADK равна $\beta + (180^\circ - \beta) = 180^\circ$. Значит, четырехугольник ADKB вписан в некоторую окружность. В этой окружности вписанные углы BAK и BDK опираются на одну дугу и, следовательно, равны: $\angle BAK = \angle BDK = \beta$. Поэтому треугольник AKB − равнобедренный: $AK = BK$, ч.т.д.

11.3 На конгрессе присутствуют 200 ученых, каждый из которых знает ровно 4 языка. Известно, что из любых трех ученых какие-то двое могут говорить на одном языке. Докажите, что каким-то языком владеют не менее 26 участников конгресса.

Решение: Предположим сначала, что найдутся двое ученых, A и B, среди языков которых нет общего. Если X − любой из остальных 198 ученых, то из условия задачи вытекает, что либо A и X, либо B и X имеют общий язык. Поэтому хотя бы один из A и B, скажем, A, имеет какой-то общий язык с $n \ge \frac{198}{2} = 99$ учеными (с каждым ученым свой общий язык). Эти n ученых разбиваются на четыре группы в соответствии с тем языком, который у них общий с A. Хотя бы одна группа состоит из не менее, чем $\frac{n}{4} \geq \frac{99}{4} > 24$ ученых, т.е. не менее, чем из 25 ученых. В итоге вместе с А получаем не менее 26 ученых, которые знают один язык.

Второй случай: у любых двух ученых есть общий язык. Возьмем какого-нибудь ученого А. Он имеет общий язык с любым ученым Х. Получаем: 199 ученых разбиваются на четыре группы, в соответствии с тем, какой из них язык общий с А. Хотя бы одна группа состоит не менее чем из $\frac{199}{4} > 49$ ученых, и все они знают один язык.

11.4 Бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ образована по закону: $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{a_n}}$ при $n = 1, 2, \ldots$. Докажите, что некоторый интервал длины 1 содержит более тысячи членов этой последовательности.

Решение. Ясно, что последовательность возрастающая: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ Ниже мы докажем, что разности соседних членов последовательности, т.е. $a_{n+1} - a_n$, окажутся меньше $\frac{1}{2000}$, начиная с некоторого номера n_0. Тогда $a_{n_0+1} - a_{n_0} < \frac{1}{2000}$, $a_{n_0+2} - a_{n_0+1} < \frac{1}{2000}$ и т.д., поэтому $a_{n_0+p} - a_{n_0} < \frac{p}{2000}$, и интервал $(k; k+1)$, где $k = a_{n_0}$, содержит $a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots, a_{n_0+1000}, \ldots, a_{n_0+2000}$ – две тысячи членов последовательности.

Итак, докажем требуемое утверждение о разностях $a_{n+1} - a_n$. Имеем:

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = \frac{1}{a_n}, \quad (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}, \quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n(a_{n+1} + a_n)}.$$

Оцениваем:

$$a_{n+1} - a_n < \frac{1}{a_n(a_n + a_n)} = \frac{1}{2a_n^2}, \tag{1}$$

$$a_{n+1} - a_n > \frac{1}{a_n(a_{n+1} + a_{n+1})} = \frac{1}{2a_n a_{n+1}}. \tag{2}$$

С помощью (2) легко показать, что последовательность возрастает неограниченно, но нам достаточно установить, что, начиная с некоторого номера, все члены последовательности больше 100. Предположим, что это не так. Тогда все члены последовательности не больше 100. Из неравенства (2) тогда следует, что

$$a_{n+1} - a_n > \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 100} = \frac{1}{20000}$$

для любого номера n, откуда $a_{n+1}-a_1>\dfrac{n}{20000}$. Следовательно, если $n\ge 2000000$, то $a_n>100$ – противоречие с предположением $a_n\le 100$.
Пусть n_0 – номер, начиная с которого все члены последовательности больше 100. Тогда в силу (1) получаем для $n\ge n_0$

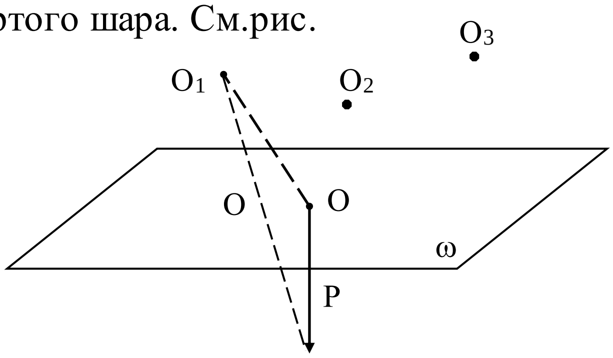
$$a_{n+1}-a_n<\frac{1}{2\cdot 100^2}=\frac{1}{20000}<\frac{1}{2000}.$$

Решение завершено.

Примечание. В действительности идея и схема решения очень проста. неравенство (2) используется для доказательства того, что (a_n), монотонно возрастая, становятся сколь угодно большими, а значит, $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ сколь угодно малыми. При этом неравенство (1) говорит нам о том, что соседние члены последовательности становятся сколь угодно близкими, а, значит, на интервале единичный длины их может оказаться много.

11.5 В пространстве даны 4 различных шара одинакового радиуса. Докажите, что объединение любых трех их них не содержит целиком четвертый шар.

Решение: Пусть O_1, O_2, O_3 – центры трех шаров, O - центр четвертого шара, R – их радиус. Идея решения: отодвинемся подальше от O_1, O_2, O_3, оставаясь в пределах четвертого шара. См.рис.



Рассмотрим сначала случай, когда точки O_1, O_2, O_3 находятся в общем положении. Через O проведем плоскость ω, параллельную плоскости $(O_1O_2O_3)$. Точки O_1, O_2, O_3 расположены либо по одну сторону от ω, либо на ω. Рассмотрим точку P, такую, что вектор $\overline{OP}\perp\omega$ и направлен в то полупространство, где нет точек O_1, O_2, O_3, и $|\overline{OP}|=R$. Утверждается, что точка P не принадлежит ни одному из шаров с центрами O_1, O_2, O_3 (хотя, конечно, принадлежит четвертому шару). Очевидно, что $\angle POO_1\ge 90^{\circ}$, поэтому в треугольнике POO_1 сторона O_1P – наибольшая, и $O_1P>OP=R$, т.е. P не лежит в первом шаре. Аналогично, P не лежит ни во втором, ни в третьем шарах.

Случай, когда точки O_1, O_2, O_3 лежат на одной прямой, требует лишь незначительных изменений в рассуждениях.