11 класс

11.1. Найдите площадь фигуры, задаваемой на координатной плоскости неравенствами $|x|-1 \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+1$. **Решение**. См. задачу 10.1.

11.2. Назовём натуральное число любопытным, если после умножения на 9 оно записывается теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что множество любопытных чисел бесконечно**.**

Решение. Рассуждая аналогично тому, как это сделано при решении задачи 7.4, рассмотрим числа $N_k = 1099...989$ (здесь между цифрами 0 и 8 находится k девяток). Легко непосредственно проверить, что все числа N_k при любом натуральном k любопытные.

11.3. Решите неравенство $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+8\sin x < 8$.

Ответ: 0 ≤ x ≤ 1. **Решение**. ОДЗ неравенства есть отрезок [0;1]. На [0;1] функция *f(x)* = $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}+8\sin x$ монотонно возрастает. Проверим значение на правом конце отрезка, а именно, покажем, что $f(1) < 8$. Действительно, 1+ 8sin1 < 1+8sin π/3 (т.к. 1< π/3, а функция sin x в первой четверти возрастает) и осталось проверить неравенство $1+4\sqrt{3}<8 \iff 4\sqrt{3}<7 \iff 16\ 3 < 49$. Таким образом, решением исходного неравенства будут все точки отрезка [0;1]

11.4. **а)** Дан прямоугольный параллелепипед объема 2017 с целочисленными координатами вершин в пространстве с декартовой системой координат. Найдите диагональ параллелепипеда, если известно, что его ребра параллельны осям координат. **б)** Существует ли прямоугольный параллелепипед объема 2017 с целочисленными координатами вершин, у которого не все ребра параллельны осям координат.

Ответ: **а)** $\sqrt{2017^2+2}$**, б)** существует**. Решение**. **а)** Пусть размеры параллелепипеда $a\times b\times c$. Тогда имеем abc = 2017, и в силу простоты числа 2017 получаем, что ребра a, b, c равны (в некотором порядке) 2017, 1, 1, поэтому диагональ равна $\sqrt{2017^2+1^2+1^2}$ **. б)** 2017 это простое число вида 4k+1, а такие числа можно представить как сумму двух точных квадратов; в данном случае 2017=1936+81= 44^2+9^2 (такое представление нетрудно подобрать, т.к. 44 – самое большое натуральное число, квадрат которого меньше 2017). Поэтому можно построить параллелепипед, основанием которого является квадрат в плоскости xOy со сторонами, не параллельными осям x и y , а высотой – отрезок [0;1] оси z (вершины квадрата – точки (0;0), (44;9), (-9;44), (35;53), сторона квадрата равна $\sqrt{2017}$). Диагональ этого параллелепипеда равна $\sqrt{2017+2017+1}$ = $\sqrt{4035}$

11.5. ? Имеется 10 палочек длины $1; 1.9; (1.9)^2; ...; (1.9)^9$. Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить **а)** треугольник; **б)** равнобедренный треугольник?

Ответ: **а)** можно; **б**) нельзя. **Решение:** см. задачу 10.5