МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2017-2018 уч. год
11 класс
(4 часа)

1. Найти все натуральные числа n такие, что значение выражения $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}$ является натуральным числом, меньшим 2217.
Ответ: $n = 3^8, n = 2^8$.

Решение. Преобразуем выражение $\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}} = \left(n\left(n(n)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$\left(n\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(n(n)^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(n^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{7}{8}}$.
Значит, число должно быть восьмой степенью какого-то натурального числа. При $n = 4^8 = 2^{16}$, проверка даёт, что
$\sqrt{2^{16}\sqrt{2^{16}\sqrt{2^{16}}}} = \sqrt{2^{16}\sqrt{2^{24}}} = \sqrt{2^{28}} = 2^{14} = 4096 > 2217$.
Осталось проверить только $n = 3^8, n = 2^8$.
$\sqrt{3^8\sqrt{3^8\sqrt{3^8}}} = \sqrt{3^8\sqrt{3^{12}}} = \sqrt{3^{14}} = 3^7 = 2187 < 2217$.
$\sqrt{2^8\sqrt{2^8\sqrt{2^8}}} = \sqrt{2^8\sqrt{2^{12}}} = \sqrt{2^{14}} = 2^7 = 128 < 2217$.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Только верный ответ – 1 балл.
Если приведены оба верных примера и сделана проверка, что они подходят, и не доказано, что других ответов нет – 3 балла.
Приведена только верная оценка – 3 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

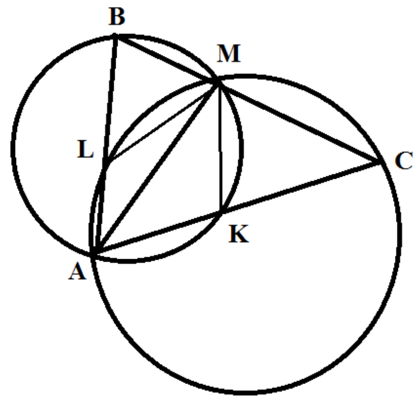
2. Известно, что $tg\alpha$ и $tg3\alpha$ целые. Найдите все возможные значения $tg\alpha$.
Ответ: -1; 0 или 1.
Решение. Пусть $tg\alpha=n$, а $tg3\alpha=k$. Используя формулу тангенса тройного угла (или выведя её) получим: $k = \frac{3n-n^3}{1-3n^2}$.
Преобразуем равенство: $k(3n^2 - 1) = n(n^2 - 3)$.
Пусть $|n| > 1$.
Значит, $(3n^2 - 1)$ и n взаимно простые числа и, следовательно, $k = pn$.
Тогда равенство примет вид: $p(3n^2 - 1) = (n^2 - 3)$. Так как обе скобки положительные числа, то и p тоже число положительное.
Преобразуем равенство к новому виду: $(3p - 1)n^2 = p - 3$.

Так как $(3p-1)$ тоже число положительное, то получим следующее неравенство: $4(3p-1) \le p-3 \Leftrightarrow 11p \le 1 \Leftrightarrow p \le \frac{1}{11}$. Противоречие.
Осталось рассмотреть значения $n=-1; 0$ или 1 и убедиться, что они подходят при соответствующих углах $\alpha=-\frac{\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4}$.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Только верный ответ – 1 балл.
Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

3. Существуют ли два квадратных трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и $(a + 1)x^2 + (b + 1)x + (c + 1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?
Ответ: Нет.
Решение. Предположим, что такие трёхчлены существуют, тогда по теореме Виета:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1x_2 = \frac{c}{a}; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_3 + x_4 = -\frac{b+1}{a+1}, \\ x_3x_4 = \frac{c+1}{a+1}. \end{cases}$$
Перепишем системы в удобном виде:
$$\begin{cases} a(x_1 + x_2) = -b, \\ ax_1x_2 = c; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} (a+1)(x_3 + x_4) = -(b+1), \\ (a+1)x_3x_4 = c+1. \end{cases}$$
Рассмотрим первый случай. Пусть c – нечётное число. Тогда a, x_1, x_2 тоже нечётные числа. Поэтому $x_1 + x_2$ – чётное число, значит, и b – чётное число. Следовательно, $b+1$ – нечётное число, а тогда и $a+1$ – нечётное число. Противоречие, так как двух последовательных нечётных чисел не бывает.
Аналогично рассматривается второй случай, когда c – чётное число.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Только верный ответ – 0 баллов.
Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
Если верно рассмотрен только один случай – 3 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Окружность, описанная около треугольника ABM, повторно пересекает AC в точке K, а окружность, описанная около треугольника AMC, пересекает AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$.
Решение. Так как AM биссектриса, то хорды, стягивающие дуги, на которые опираются равные углы, равны между собой. Поэтому $BM = KM$ и $LM = CM$. Так как сумма противоположных углов во вписанном четырёхугольнике равна 180°, то $\angle BML = \angle LAK$, а так же $\angle CMK = \angle LAK$.

Получаем, что $\angle BML = \angle CMK$. Тогда по двум сторонам и углу между ними равны треугольники BML и KMC, значит, $BL = KC$.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
Если верное решение – 7 баллов.



5. Учительница заполняет клетки классного журнала размером 7×8 (7 строк, 8 столбцов). В каждую клетку она ставит одну из трёх оценок: 3, 4 или 5. После заполнения всего журнала оказалось, что в каждой строке троек не меньше, чем четвёрок и не меньше, чем пятёрок, а в каждом столбце четвёрок не меньше, чем пятёрок и не меньше, чем троек. Сколько пятёрок могла поставить учительница?
Ответ: 8 пятёрок.
Решение.
Первый шаг.
В каждой строке троек не меньше, чем четвёрок, следовательно, и во всём журнале, троек не меньше, чем четвёрок. В каждом столбце четвёрок не меньше, чем троек, следовательно, во всём журнале четвёрок не меньше, чем троек. Значит, троек и четвёрок в журнале поровну.
Второй шаг.
Предположим, что в каком-нибудь столбце четвёрок больше, чем троек. Так как в остальных столбцах четвёрок не меньше, чем троек, то получим, во всём журнале четвёрок больше, чем троек. Противоречие. Значит, в каждом столбце четвёрок и троек поровну.
Третий шаг.
Рассмотрим всевозможные случаи распределения троек, четвёрок и пятёрок в столбце: 1) 0, 0, 7; 2) 1, 1, 5; 3) 2, 2, 3 – не подходят, так как тогда пятёрок больше. Остаётся только случай 3, 3, 1. Тогда всего в журнале может быть 8 пятёрок.
Четвёртый шаг.
Такое распределение возможно (надо учитывать, что и в строках аналогично четвёрок и троек поровну!), пример см. рис.

5	5	4	3	4	3	4	3
4	3	5	5	3	4	3	4
3	4	3	4	5	5	4	3
4	3	4	3	4	3	5	5
3	4	3	4	3	4	3	4
4	3	4	3	4	3	4	3
3	4	3	4	3	4	3	4

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если только верный пример – 3 балла.
Если только верная оценка – 4 балла.
Если верное решение (любой правильный пример и обоснование оценки) – 7 баллов.