Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017 – 2018 учебном году
11 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

11.1. *Рассматриваются все уравнения вида* $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d)$, *где* a, b, c *и* d *— некоторые действительные числа, которые удовлетворяют условию* $a+d=b+c=2017$. *Докажите, что все рассматриваемые уравнения имеют общий корень и найдите его.*

Решение: $(x-a)(x-b)=(x-c)(x-d) \Leftrightarrow x(c+d-a-b)=cd-ab$. Из условия $a+d=b+c=2017$ следует, что $d=2017-a$ и $b=2017-c$. Тогда уравнение принимает вид $x\big(c+(2017-a)-(2017-c)-a\big)=2017c-ac-(2017a-ac)$. После равносильных преобразований получим равенство $(c-a)(2x-2017)=0$. Оно превращается в тождество при $a=c$, а в противном случае решение уравнения единственно: $x=\dfrac{2017}{2}$. Во всех случаях число $x=\dfrac{2017}{2}$ является корнем.

Ответ: общий корень $x=\dfrac{2017}{2}$.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство и верно найденный общий корень	7 баллов
Доказательство верно, но общий корень не найден (найден неверно)	6 баллов
Случай $a=c$ (эквивалентно $b=d$) не разобран, в остальном доказательство верное	5 баллов
Верно указан только общий корень	1 балл

11.2. *Рыбаки поймали несколько карасей и щук. Каждый поймал столько карасей, сколько щук поймали все остальные. Сколько было рыбаков, если всего карасей поймано в* 10 *раз больше, чем щук? Ответ обоснуйте.*

Решение:

<u>Способ 1.</u> Каждый рыбак поймал карасей и щук вместе столько же, сколько всего щук поймано. Суммируя уловы всех рыбаков, получим, что общий улов всех рыбаков (в количестве рыб) равен общему количеству пойманных щук, умноженному на количество рыбаков. С другой стороны, карасей в 10 раз больше, чем щук, поэтому общей улов по числу рыб в 11 раз больше числа щук. Значит, всего рыбаков 11.

<u>Способ 2.</u> Пусть всего рыбаков n, и i-й рыбак поймал a_i щук и b_i карасей ($i=\overline{1,\,n}$). Тогда $b_k=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)-a_k$ для всех k. Просуммируем по k все эти равенства, получим

$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} a_i - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = (n-1) \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Но $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 10 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, откуда $n - 1 = 10$ и $n = 11$.

Ответ: 11 рыбаков.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметических или алгебраических ошибок	5 баллов
Верно составлена, но не решена система уравнений, полностью описывающая условие задачи	3 балла
Разобраны только серии частных случаев, например, когда все рыбаки поймали одно и то же количество щук	1 балл
Верный ответ без обоснования или проиллюстрированный конечным числом примеров	0 баллов

11.3. *Существует ли многочлен $p(x)$ 13-й степени с коэффициентом при старшей степени, равным $\frac{1}{1001}$, который во всех целых точках принимает целые значения? Ответ обоснуйте.*

Решение: Например, годится многочлен $p(x) = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-12)}{1001}$. Покажем это. При раскрытии скобок наибольшая степень x получится 13, а коэффициент при ней будет равен $\frac{1}{1001}$. Так как $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, остаётся показать, что при любом целом x число $A = x(x-1)(x-2)\ldots(x-12)$ делится без остатка на каждое из чисел 7, 11, и 13. Но каждая из этих делимостей очевидна, поскольку число A представляет собой произведение 13 последовательных целых чисел.

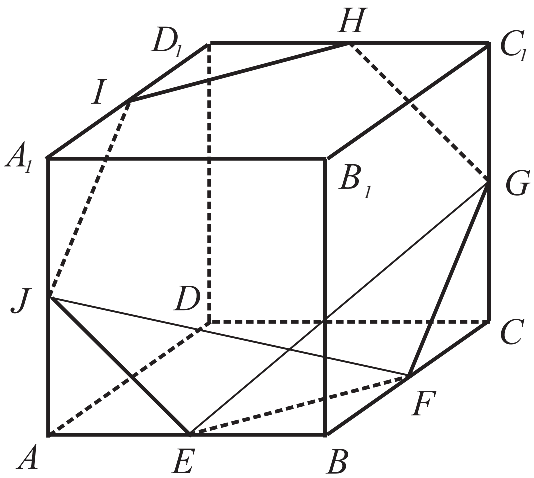
Ответ: существует.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример многочлена, удовлетворяющего условию, но делимость при всех целых x на 1001 не доказана	5 баллов
Идея (не доведённая до решения) использовать для построения многочлена произведение вида $x(x+1)(x+2)\ldots$	3 балла
Неверный ответ или ответ без обоснования, а также примеры многочленов, не подходящих под условия задачи	0 баллов

11.4. *Можно ли в единичный куб поместить правильный шестиугольник со стороной, равной $\frac{2}{3}$? Ответ обоснуйте.*

Решение: Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его сечение плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, BC и CC_1 — см. рисунок. В сечении получится шестиугольник $EFGHIJ$ — см. рисунок. Покажем, что он правильный. Действительно, каждая его сторона равны половине диагонали грани, то есть равна $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Из равенства треугольников JEF и EFG (по трём сторонам) следует равенство углов $\angle JEF = \angle EFG$. Аналогично показывается равенство всех других внутренних углов шестиугольника. Так как $\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{2}{3}$, внутрь шестиугольника $EFGHIJ$ (а, значит, и внутрь куба) помещается правильный шестиугольник со стороной $\frac{2}{3}$.



К решению задачи 11.4

Примечание: Правильность шестиугольника $EFGHIJ$ можно было также доказать, используя тот факт, что он переходит в себя при поворотах на $120°$ и на $180°$ относительно диагонали куба B_1D.

Ответ: можно.

Рекомендации по проверке:

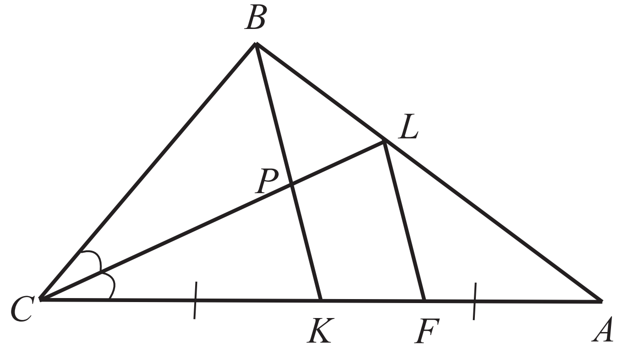
есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Приведена верная конструкция, но не доказана её осуществимость, например, в приведённом нами решении не доказана правильность шестиугольника $EFGHIJ$	5 баллов
Верно исследованы конструкции (в любом количестве), не приводящие к ответу, например, попытки получить шестиугольник, перпендикулярный какой-либо грани	1 балл
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

11.5. *В треугольнике ABC проведены медиана BK и биссектриса CL. Пусть P — точка их пересечения. Докажите, что* $\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1$.

Решение:

Способ 1. Проведём через точку l прямую, параллельную прямой BK; пусть она пересекает сторону AC в точке F. По теореме Фалеса $\frac{CP}{PL} = \frac{CK}{KF}$. По этой же теореме $\frac{KF}{FA} = \frac{BL}{LA}$. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BL}{LA} = \frac{BC}{CA}$. Тогда

$$\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = \frac{CK}{KF} - \frac{FA}{KF} = \frac{CK - FA}{KF} = \frac{AK - FA}{KF} = \frac{KF}{KF} = 1.$$



К решению задачи 11.5

Способ 2. Применим теорему Менелая к треугольнику ACL и секущей BK:

$$\frac{CP}{PL} \cdot \frac{LB}{BA} \cdot \frac{AK}{KC} = 1.$$

Так как $AK = KC$ (BK — медиана), а $AB = AL + LB$, находим, что

$$\frac{CP}{PL} = \frac{AL + LB}{LB} = \frac{AL}{LB} + 1.$$

По свойству биссектрисы $\frac{AL}{LB} = \frac{AC}{BC}$, откуда $\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения разность $\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC}$ получилась не равной 1 из-за ошибок в алгебраических выкладках	5 баллов
Имеется попытка (неудачная) выразить отношение $\frac{PC}{PL}$ ерез параметры треугольника ABC с помощью подобия, теоремы Менелая или используя тригонометрию	3 балла
Задача решена в частных случаях (в любом количестве)	1 балл
Верный ответ без обоснования и/или любые выкладки, из которых не видно хода решения	0 баллов

11.6. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 2,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z} &= \dfrac{5}{6},\\ xyz &= -1. \end{cases}$$

Решение:

Способ 1. Замена $2y=p$, $3z=s$ приводит (после преобразований) к равносильной системе $\begin{cases} x+p+s &= 2\\ xps &= -6\\ xp+ps+sx &= -5 \end{cases}$. По теореме Виета числа x, p, s — суть корни кубического уравнения $t^3-2t^2-5t+6=0$, то есть числа $1, -2, 3$. В зависимости от того, какая переменная какому корню соответствует, получим 6 разных решений.

Способ 2. Второе уравнение системы после домножения на $6xyz$ (которое из третьего уравнения равно -6), превращается в равносильное ему уравнение $6yz+3xz+2xy=-5$. Умножим его почленно на x, получим $6xyz+x^2(3z+2y)=-5x$. Подставляя сюда из первого уравнения $2y+3z=2-x$, а из третьего $xyz=-1$, получим кубическое относительно x уравнение $-6+x^2(2-x)=-5x$. Решая его, найдём $x=1$, или $x=-2$ или $x=3$. Каждый из этих трёх случаев сводится к системе двух уравнений с двумя неизвестными y и z, которые решаются методом подстановки.

Ответ:
$(1,\,-1,\,1)$, $\left(1,\,\dfrac{3}{2},\,-\dfrac{2}{3}\right)$, $\left(-2,\,\dfrac{1}{2},\,1\right)$, $\left(-2,\,\dfrac{3}{2},\,\dfrac{1}{3}\right)$, $\left(3,\,-1,\,\dfrac{1}{3}\right)$, $\left(3,\,\dfrac{1}{2},\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметических ошибок	6 баллов
Ход решения верен, но утеряны одно или два решения системы из-за ошибок в преобразованиях	5 баллов
Верно получено кубическое уравнение относительно одной из переменных, и это уравнение не решено	3 балла
Осуществлена замена, сводящая систему к симметричной относительно трёх неизвестных	2 балла
Приведены все 6 решений, но не доказано отсутствие других	1 балл
Указаны некоторые (не все решения) и/или любые выкладки, из которых не видно хода решения	0 баллов