Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике 2017 год

11 класс

> *1. При каких p один из корней уравнения $x^2 - px + p = 0$ является квадратом другого? (считаем, что корни уравнения различны)*

Ответ. $2 \pm \sqrt{5}$.

Решение. Обозначим корни a и a^2. По теореме Виета $a + a^2 = p$, $a \cdot a^2 = p$. Значит, $a + a^2 = a^3$. Корень $a = 0$ не подходит, так как у уравнения $x^2 = 0$ корни совпадают. С учетом $a \neq 0$ получаем, что $a^2 - a - 1 = 0$, корнями этого уравнения являются $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. При этом $p = a^2 + a = (a + 1) + a = 2a + 1$.

Критерии. Если не отброшен лишний корень, снимается 2 балла. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *2. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного натурального числа n, а Вася – сумму всех его чётных делителей. Может ли произведение их результатов оказаться равным 2016? Если может, найдите все такие числа n.*

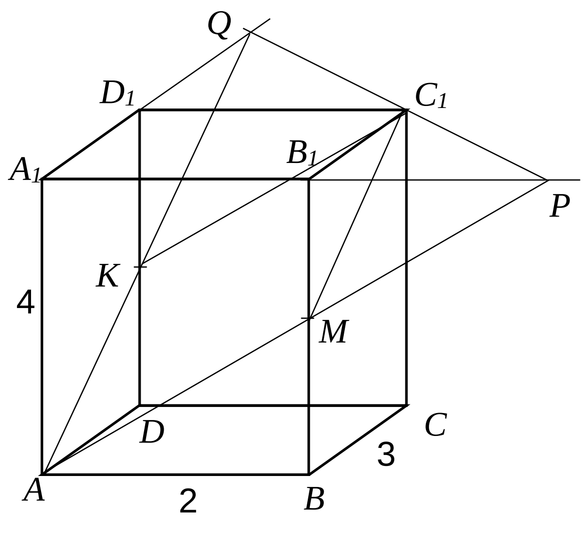
Ответ. 88 и 192.

Решение. Пусть $n = m \cdot 2^k$ – исходное чётное число, и m – его нечётный множитель. Сумма нечётных делителей числа n совпадает с суммой s всех делителей числа m, и значит, Петя получит число s. Сумма всех чётных делителей n состоит из суммы делителей, которые делятся только на 2, из суммы делителей, кратных только 4, и так далее, и наконец, из суммы делителей, кратных 2^k. Каждый нечётный делитель при умножении на 2 – это делитель, кратный только 2, поэтому первая сумма равна $2s$, вторая сумма – $4s$ и так далее. Следовательно, сумма всех чётных делителей будет $2s + 4s + ... + 2^k s = 2(2^k - 1)s$. Произведение результатов Пети и Васи равно $2s^2(2^k - 1) = 2016$, и, значит, $s^2(2^k - 1) = 1008$.

Полученное равенство означает, что число 1008 = 24·32·7 делится на квадрат натурального числа $s > 1$ и число вида $2^k - 1$. Среди разложений числа $1008 = 2^2 \cdot 252 = 3^2 \cdot 112 = 4^2 \cdot 63 = 6^2 \cdot 28 = 12^2 \cdot 7$, содержащих квадрат натурального числа, сомножитель вида $2^k - 1$ содержат только разложения $4^2 \cdot 63$ и $12^2 \cdot 7$. Значит, $s = 4$, $k = 6$, или $s = 12$, $k = 3$. В первом случае, $m = 3$, и значит, $n = 3 \cdot 2^6 = 192$; во втором – $m = 11$, и значит, $n = 11 \cdot 2^3 = 88$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны $AB = 2$, $AC = 3$, $AA_1 = 4$. Найти площадь сечения AMK, где M – середина BB_1 и K – середина DD_1.*



Ответ. $2\sqrt{22}$

Решение. Построим искомое сечение (см. рисунок). Точка P есть пересечение AM и A_1B_1, В силу положения точки M A_1P вдвое больше, чем A_1B_1. Аналогично строим точку Q, $A_1Q = 2A_1D_1$. Значит, PQ параллельно B_1D_1 и проходит через точку C_1. Итак, сечение является параллелограммом AKC_1M.

Площадь можно вычислить разными способами.

1 способ. Заметим, что $KM = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $AM = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $AK = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Итак, треугольник AKM равнобедренный, его высота равна $\sqrt{13-2} = \sqrt{11}$. Тогда площадь сечения составляет $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{11} = 2\sqrt{22}$.

2 способ. Используем векторы. Известно, что $S = |\overrightarrow{AK}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \sin\varphi$, в то время как $(\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AM}) = |\overrightarrow{AK}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos\varphi$ значит, $S^2 = \overrightarrow{AK}^2 \cdot \overrightarrow{AM}^2 - (\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AM})^2$. Заметим, что с параллелепипедом можно связать систему координат с началом с точке A. Имеем $\overrightarrow{AK} = (0, 3, 2)$ и $\overrightarrow{AM} = (2, 0, 2)$. Тогда $\overrightarrow{AK}^2 = 3^2 + 2^2 = 13$, $\overrightarrow{AM}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, $(\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AM}) = 0 + 0 + 4 = 4$ откуда и следует ответ.

Замечание. Возможны и другие способы вычисления площади. Например, через векторное произведение векторов $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

> *4. Пусть x_1, x_2, … , x_{100} — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Верно ли, что на этом отрезке найдётся такое число x, что $|x - x_1| + |x - x_2| + . . . + |x - x_{100}| = 50$?*

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + ... + |x - x_{100}| - 50$, непрерывную на отрезке [0;1]. Имеем $f(0) = x_1 + x_2 + … + x_{100} – 50$, $f(1) = (1 – x_1) + (1 – x_2) + … + (1 – x_{100}) – 50$. Значит, $f(0) + f(1) = \Sigma x_i + \Sigma(1 - x_i) - 100 = 0$.

Если числа $f(0)$ и $f(1)$ равны 0, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня: 0 и 1. Если же одно из этих чисел отрицательное, то другое — положительное. Поскольку f — непрерывная функция, существует такое $x \in [0;1]$, при котором $f(x) = 0$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

5. На доске размером 10×10 стоят 10 небьющих друг друга ладей. Можно ли остальные клетки доски замостить доминошками? (Доминошка — прямоугольник размером 1×2 или 2×1.

Ответ. Нельзя.

Решение. Для каждой ладьи с номером i обозначим через s_i сумму номеров строки и столбца, в которых она стоит. Поскольку ладьи не бьют друг друга, то номера всех строк и столбцов встречаются ровно по одному разу. Сумма всех чисел s_i независимо от расстановки будет чётной и равна

$$\sum_{i=1}^{10} s_i = 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 10) = 110$$

Из этого равенства, в частности, следует, что количество нечётных чисел s_i будет чётным. Таким образом, из 10 чисел s_i количества нечётных и чётных значений не совпадают. Предположим, левый нижний угол доски покрашен в чёрный цвет, тогда у всех чёрных клеток доски числа s_i чётные, а у белых клеток – нечётные. Поскольку количества нечётных и чётных значений s_i не совпадают, ладей на чёрных и белых клетках – разное количество. Значит, разными будут и количества белых и чёрных свободных от ладей клеток. Так как каждая доминошка закрывает по одной чёрной и белой клетке доски, то оставшиеся свободные клетки выложить доминошками не удастся.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.