2017 год

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

Решения

11 класс

1. Из первого равенства получаем

f((x+2017)+2017) = f(2017 – (x+2017)) = f(-x),

а из второго

f((x+2018)+2018) = f(2018 – (x+2018)) = f(-x).

При произвольном x правые части приведённых равенств совпадают, следовательно, равны и левые:

f(x + 4034) = f(x+4036).

Заменив переменную x = y – 4034, получим, что при произвольном действительном y выполнено равенство

f(y) = f(y+2).

Поскольку функция f(y) определена при всех действительных y, из этого равенства следует, что число 2 является её периодом.

2. Для x допустимы значения $x \geq 1$. Обозначим $a = 2\sqrt{x-1}$. Возводя в квадрат обе части уравнения и выполняя преобразования, получим:

$$x - a + 2\sqrt{(x-a)(x+a)} + x + a = 4;$$

$$2x + 2\sqrt{x^2 - a^2} = 4;$$

$$x + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2;$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2 - x.$$

Поскольку левая часть полученного равенства не отрицательна, правая тоже должна быть не отрицательной. Таким образом, равенство может быть выполнено, только если $1 \leq x \leq 2$.

Вновь, возводя в квадрат, получим равенство

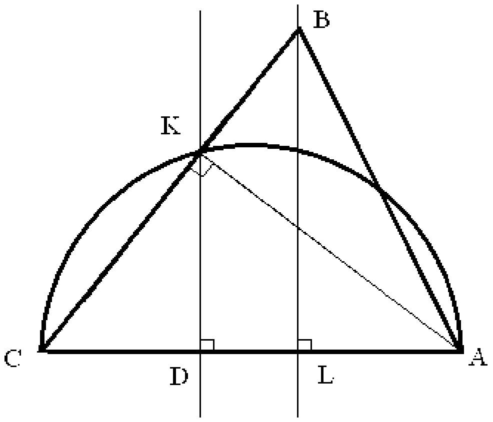
$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4,$$

истинное при всех допустимых значениях x.

Ответ: [1; 2].

3. Проведём описанную окружность треугольника ABC и зафиксируем направление её обхода при движении A → B → C → A. При перемещении одной из шайб в противоположную полуплоскость относительно прямой, проходящей через две другие точки, направление обхода такой окружности меняется: если сначала направление обхода было по часовой стрелке, то после перемещения одной шайбы оно становится против часовой стрелки и наоборот. За 25 ходов произойдёт 25 смен направления. Так как число 25 нечётное, в результате направление обхода описанной окружности изменится. Следовательно, шайбы не могут вернуться на свои места.

Ответ: нет.



4. Покажем, как можно построить требуемый треугольник. Построим на плоскости произвольно отрезок CA, на нём выберем точку L так, что выполнено равенство $\frac{CL}{LA} = \beta$, и на отрезке CL выберем точку D так, что $\frac{LD}{DC} = \alpha$. В точках L и D построим перпендикуляры к AC: прямую $p \perp AC$ через точку L и прямую $q \perp AC$ через точку D. Окружность ω с диаметром AC пересекает прямую q в двух точках. Обозначим одну из них K. Пусть B – точка пересечения прямых p и CK. По теореме Фалеса $\frac{BK}{KC} = \frac{LD}{DC} = \alpha$. Угол AKC – прямой, как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Отрезок AK является высотой. Поскольку точка пересечения высот треугольника ABC находится внутри треугольника, он – остроугольный. Следовательно, треугольник ABC – искомый.

Ответ: Да.

5. Покажем, что число братьев должно равняться числу сестёр. Пусть имеется m братьев и n сестёр. Поскольку сейчас все братья в ссоре с разным числом сестёр, значит, есть хотя бы одна пара, которая всё ещё находится в ссоре. Поскольку сейчас каждая сестра находится в ссоре с одним и тем же числом братьев, значит каждая в ссоре хотя бы с одним из них, и час назад она с этим братом тоже была в ссоре. Но час назад сёстры были в ссоре с разным числом братьев. Обозначим a_i число братьев, бывших в ссоре с i-й сестрой час назад. Все числа $a_1, \ldots, a_n$ – это различные натуральные числа, не превосходящие m., следовательно, $n \le m$ (число сестёр не больше, чем число братьев).

С другой стороны, час назад каждая сестра была в ссоре с разным числом братьев, следовательно, одна из сестёр не была в ссоре хотя бы с одним братом. Братья же были в ссоре с одинаковым числом сестёр, значит, каждый не был в ссоре хотя бы с одной из них. После примирения число ссорящихся пар уменьшилось, и теперь по-прежнему каждый из братьев не в ссоре хотя бы с одной из сестёр. Обозначим b_j число сестёр, с которыми находится в ссоре брат с номером j. Числа $b_1, \ldots, b_m$ – различные целые не отрицательные числа, не превосходящие $n - 1$, следовательно, $m \le n$ (число братьев не больше, чем число сестёр). Утверждение доказано, равенство $m = n$ является истинным.

Осталось найти возможные значения для числа $m = n$. Как видно из предыдущего рассуждения, час назад была сестра, которая была в ссоре ровно с одним братом. Значит, после примирения каждая из сестёр находится в ссоре ровно с одним братом. Общее число ссорящихся пар равно n. И при этом число ссорящихся пар равно $n = 0 + 1 + \ldots + (n - 1)$, откуда $n = 3$.

Приведём пример, показывающий, что такая ситуация возможна. Обозначим братьев буквами A, B, C, а сестёр – цифрами 1, 2, 3. Запись вида A3 будет означать, что брат A в ссоре с сестрой 3. Пусть множество пар в ссоре час назад было {A1, A3, B2, B3, C2, C3}, а после примирения – {A1, C2, C3}. Легко видеть, что в этом примере условия выполняются.

Замечание. Если дан только ответ без обоснования, 0 баллов. Если приведён пример без доказательства равенств $m = n = 3$, 1 балл.

Ответ: Три брата и три сестры.