11 класс

1. Найдите количество целочисленных точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}=\frac{1}{2017}$.

Валеев Н.Ф.

2. На шахматной доске расставлены четыре ладьи так, что они бьют все белые клетки.

а) Приведите пример такой расстановки.

б) Определите количество таких расстановок.

Женодаров Р.Г.

3.Найдите все неотрицательные многочлены *g*, удовлетворяющие тождеству $g(x+y)=g(x)+g(y)+2\sqrt{g(x)g(y)}$ при всех неотрицательных *x* и *y*.

Валеев Н.Ф.

4. Пусть $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$ выпуклый 2017 –угольник, B_k середины ребер A_kA_{k+1}, $k=1,..,2016$, B_{2017} середина ребра A_1A_{2017}. Докажите, что площадь многоугольника $B_1B_2B_3....B_{2016}B_{2017}$ не меньше половины площади $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$, т.е $S_{A_1A_2A_3....A_{2017}}<2S_{B_1B_2B_3....B_{2017}}$.

Валеев Н.Ф.

5. Основание пирамиды *ABCDP* с вершиной *P*, вписанный в окружность четырехугольник. Известно, что прямые *AD* и *BC* пересекаются в точке *K*, вне этой окружности. Углы $\angle ADP$ = $\angle BCP$ = 90°, а углы $\angle APK$ *и* $\angle BPK$ острые. Докажите, что прямая *PK* перпендикулярна прямой *AB*.

Луценко В.И.

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите количество целочисленных точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}=\frac{1}{2017}$.

Валеев Н.Ф.

Решение. Преобразуем исходное уравнение $\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}=\frac{1}{2017} \Rightarrow$

$2017(|x|+|y|)-|x||y|=0 \Rightarrow \quad 2017\cdot|x|+2017\cdot|y|-|x||y|-2017^2=-2017^2$, откуда вытекает $(|x|-2017)(|y|-2017)=2017^2$. Поскольку 2017 простое число, а $|x|$ и $|y|$ натуральные числа, то последнее уравнение равносильно объединению систем уравнений $\begin{cases}|x|-2017=1\\|y|-2017=2017^2\end{cases}$, $\begin{cases}|x|-2017=2017\\|y|-2017=2017\end{cases}$, $\begin{cases}|x|-2017=2017^2\\|y|-2017=1\end{cases}$. Каждая система уравнений имеет четыре различных решения не совпадающих с решениями других систем. Следовательно, искомое количество точек равно 12.
Ответ. 12.
Рекомендации по проверке. Получено разложение вида $(|x|-2017)(|y|-2017)=2017^2$ или аналогичное в рамках другого способа решения- 3 балла.

2. На шахматной доске расставлены четыре ладьи так, что они бьют все белые клетки.
а) Приведите пример такой расстановки.
б) Определите количество таких расстановок.

Женодаров Р.Г.

Решение. На шахматной доске белых клеток 32. При этом, если ладья расположена на белой клетке, то она бьет 7 белых клеток, если же на черной клетке, то 8 клеток. 1) Поскольку ладей всего 4, а белых клеток 32, то ладьи должны стоять только на черных клетках. Рассмотрим разбиение шахматной доски на 4 одинаковых полосы по вертикали и 4 по горизонтали (каждая полоса представляет собой объединение двух соседних линий).
2) Если на какой-то полосе (объединении двух соседних линий), для определенности на горизонтальной, нет ни одной ладьи, то 8 белых клеток этой полосы должны биться 8 ладьями по вертикали, что противоречит условию задачи.
3) Следовательно, на каждой из 4-х горизонтальных и 4-вертикальных полос стоит ровно 1 ладья.
Горизонтальные и вертикальные полосы пересекаясь образуют 16 клеток размера 2×2 (2 черных и 2 белых клетки). Для определения требуемого расположения ладей необходимо указать по одной клетке на каждой горизонтали так, чтобы на одной вертикальной полосе была только одна клетка (см. выше п. 1). Всего таких способов выбора клеток будет 4×3×2×1. Учитывая утверждения 1) и 2) внутри каждой клетки ладью можно расставить двумя способами и получить количество расстановок 2×4!.
Ответ. 2×4!.
Рекомендации по проверке. За верный пример расстановки ладей -2 балла;
Замечено, что ладьи должны стоять только на черных клетках-2 балла;
Доказано, что на каждой из 4-х горизонтальных и 4-вертикальных полос должна стоять ровно 1 ладья -4 б.

3.Найдите все неотрицательные многочлены g, удовлетворяющие тождеству $g(x+y)=g(x)+g(y)+2\sqrt{g(x)g(y)}$ при всех неотрицательных x и y.

Валеев Н.Ф.

Решение. Если такой многочлен существует, то из тождества $g(x+y)=g(x)+g(y)+2\sqrt{g(x)g(y)}$ при $y=x\geq 0$ получаем $g(x+x)=g(x)+g(x)+2\sqrt{g(x)g(x)}$ или $g(2x)=4g(x)$. Будем искать многочлены g в виде $g(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$. Тогда из тождества $g(2x)=4\cdot g(x)$ следует, что

$g(2x)-4g(x)\equiv\sum_{j=0}^{n}a_j(2^j-4)x^j\equiv 0$ для всех $x\geq 0$. А это возможно только при $a_j(2^j-4)=0$. Отсюда получаем, что $a_j=0$ для всех $j\neq 2$, а при $j=2$ a_j - любое число. Таким образом, если многочлен $g(x)$ существует, то он имеет вид $g(x)=a\cdot x^2$, где a - любое неотрицательное число. Проверим тождество $g(x+y)=g(x)+g(y)+2\sqrt{g(x)g(y)}$ для $g(x)=a\cdot x^2$: для всех неотрицательных x и y имеем $a(x+y)^2=ax^2+ay^2+2a\cdot x\cdot y=ax^2+ay^2+2|a|\cdot|x||y|=$.

$ax^2+ay^2+2\sqrt{ax^2\cdot ay^2}=g(x)+g(y)+2\sqrt{g(x)g(y)}$ Таким образом, $g(x)=a\cdot x^2$.

Ответ. $g(x)=a\cdot x^2$, где $a\geq 0$

Рекомендации по проверке. Если имеется только доказательство того, что многочлен $g(x)=a\cdot x^2$ удовлетворяет тождеству-2 балла.

Получена оценка для степени многочлена g- 2 б.

4. Пусть $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$ выпуклый 2017 –угольник, B_k середины ребер A_kA_{k+1}, $k=1,..,2016$, B_{2017} середина ребра A_1A_{2017}. Докажите, что площадь многоугольника $B_1B_2B_3....B_{2016}B_{2017}$ не меньше половины площади $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$, т.е $S_{A_1A_2A_3....A_{2017}}<2S_{B_1B_2B_3....B_{2017}}$.

Валеев Н.Ф.

Решение. Пусть M - произвольная внутренняя точка многоугольника $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$. Предположим, что M принадлежит треугольнику $\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}$. Треугольник $\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}$ пересекается только с двумя треугольниками $\Delta A_{k-2}A_{k-1}A_k$ и $\Delta A_kA_{k+1}A_{k+2}$, Поскольку пятиугольник $A_{k-2}A_{k-1}A_kA_{k+1}A_{k+2}$ выпуклый, у треугольников $\Delta A_{k-2}A_{k-1}A_k$ и $\Delta A_kA_{k+1}A_{k+2}$ только одна общая точка A_k. Таким образом, любая внутренняя точка M содержится одновременно не более чем в двух треугольниках вида $\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}$, $k=1,...,2016$, где $A_0=A_{2017}$.Откуда вытекает оценка суммы площадей всех треугольников вида $\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}$: $\sum_{k=1}^{2016}S_{\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}}\leq 2S_{A_1A_2...A_{2017}}$. Очевидно, что $S_{B_1B_2...B_{2017}}=S_{A_1A_2...A_{2017}}-\sum_{k=1}^{2017}S_{B_{k-1}A_kB_k}$, где $B_0=B_{2017}$. Поскольку $B_{k-1}B_k$ средние линии треугольников $\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}$, то $S_{B_1B_2...B_{2017}}=S_{A_1A_2...A_{2017}}-\sum_{k=1}^{2017}S_{B_{k-1}A_kB_k}=S_{A_1A_2...A_{2017}}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2017}S_{A_{k-1}A_kA_{k-1}}$.

Теперь из оценки $\sum_{k=1}^{2016}S_{\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}}\leq 2S_{A_1A_2...A_{2017}}$ следует искомое неравенство:

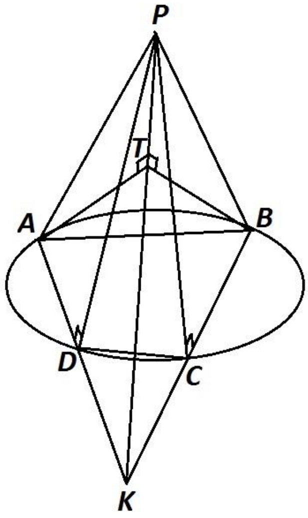
$$S_{B_1B_2...B_{2017}}=S_{A_1A_2...A_{2017}}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2017}S_{A_{k-1}A_kA_{k-1}}\geq S_{A_1A_2...A_{2017}}-\frac{1}{4}2S_{A_1A_2...A_{2017}}=\frac{1}{2}S_{A_1A_2...A_{2017}}.$$

Рекомендации по проверке. Доказано, что любая внутренняя точка M многоугольника $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$ содержится одновременно не более чем в двух треугольниках вида $\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}$, $k=1,...,2016$, где $A_0=A_{2017}$ - 3 б.

5. Основание пирамиды *ABCDP* с вершиной *P*, вписанный в окружность четырехугольник. Известно, что прямые *AD* и *BC* пересекаются в точке *K*, вне этой окружности. Углы $\angle ADP = \angle BCP = 90°$, а углы $\angle APK$ *и* $\angle BPK$ острые. Докажите, что прямая *PK* перпендикулярна прямой *AB*.

Луценко В.И.

Решение. Опустим перпендикуляр *AT* на прямую *KP*. Точки *A, D, T, P* лежат на одной окружности с диаметром *AP*. Следовательно, учитывая, что и точки *ABCD* лежат на одной окружности, получим равенства $KD \cdot KA = KT \cdot KP = KC \cdot KB$. Из последнего равенства выходит, что точки *C, B, T, P* лежат на одной окружности с диаметром *PB*. Значит, *BT* перпендикулярна *PK*. Учитывая, что прямая *PK* перпендикулярна двум прямым плоскости *ATB*, то она ортогональна всей плоскости, в частности, и прямой *AB*.



Рекомендации по проверке.

Построена высота *AT* или *BT* и приведено равенство $KD \cdot KA = KT \cdot KP = KC \cdot KB$ – 2 балла.

Доказано, что две высоты боковых граней пересекаются в одной точке *T* – 4 балла.