Решения и критерии оценивания заданий муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017/18 учебном году
7 класс

1. Все домовые любят пошалить. Все домовые любят чистоту и порядок. Каждый, кто любит чистоту и порядок, не любит шалить. Обязательно ли тогда, домовых не существует?

Решение

<u>1-й способ.</u>

1) Из условий «Все домовые любят чистоту и порядок» и «Каждый, кто любит чистоту и порядок, не любит шалить» следует, что «Все домовые не любят шалить» (Из «Если А, то В» и «Если В, то С» следует, что «Если А, то С»).

2) Из условий «Все домовые любят пошалить» и «Все домовые не любят шалить» следует, что домовых не существует (Из «Если А, то В» и «Если А, то не В» следует не А).

<u>2-й способ.</u>

Выпишем все комбинации существ в отношении владения тремя свойствами: быть домовым, любить пошалить, любить чистоту и порядок.

1) Домовой, любит шалить, любит чистоту и порядок;
2) домовой, любит шалить, не любит чистоту и порядок;
3) домовой, не любит шалить, любит чистоту и порядок;
4) домовой, не любит шалить, не любит чистоту и порядок;
5) не домовой, любит шалить, любит чистоту и порядок;
6) не домовой, любит шалить, не любит чистоту и порядок;
7) не домовой, не любит шалить, любит чистоту и порядок;
8) не домовой, не любит шалить, не любит чистоту и порядок.

Условие «Все домовые любят пошалить» исключает домовых, которые шалить не любят, то есть случаи 3 и 4.

Условие «Все домовые любят чистоту и порядок» исключает домовых, которые не любят чистоту и порядок, то есть случаи 2 и 4.

Условие «Каждый, кто любит чистоту и порядок, не любит шалить» исключает любящих чистоту и порядок и шалить, то есть случаи 1 и 5.

Таким образом, все перечисленные условия выполняются только на случаях 6, 7 и 8. Во всех этих случаях заявлен не домовой. Значит, логический вывод о том, что домовых не существует, верен.

Критерии

Задача, решенная 2-м способом, оценивается в 7 баллов.

Задача, решенная 1-м способом и с обоснованиями, в которых четко прослеживаются правила логического вывода (Из «Если А, то В» и «Если В, то С» следует, что «Если А, то С»; Из «Если А, то В» и «Если А, то не В» следует не А) оценивается в 7 баллов (Достаточно, чтобы правила логического вывода описывались в формулировках задачи, а не в обобщенной форме).

Если в обоснованиях указанные правила логического вывода не прослеживаются, то за каждое правило снимается 3 балла.

В 1-м способе во 2-м пункте считать достаточным обоснование: При условии, что домовые существуют, получили противоречащие друг другу свойства (качества) домовых: «любят шалить» и «не любят шалить».

2. Три свечи зажгли одновременно. Когда сгорела первая свеча, то от второй осталась $\frac{2}{5}$ ее часть, а от третьей $\frac{3}{7}$ части. Какая часть останется от третьей свечи, когда сгорит вторая?

Решение

За время t сгорело $\frac{3}{5}$ второй свечи и $\frac{4}{7}$ третьей.

Скорость сгорания второй свечи $\frac{3}{5t}$, скорость сгорания третьей $\frac{4}{7t}$.

$\frac{2}{5}$ второй свечи сгорит за время $\frac{2}{5}:\frac{3}{5t}=\frac{2t}{3}$.

За это время от третьей свечи сгорит $\frac{2t}{3}\frac{4}{7t}=\frac{8}{21}$ часть.

От третьей свечи останется $\frac{3}{7}-\frac{8}{21}=\frac{1}{21}$ часть.

Критерии

Допущена вычислительная ошибка или описка только в последнем действии верного хода решения, которая привела к неверному ответу - 5 баллов.

Вычислительные ошибки в более ранних действиях, в результате которых получен неверный ответ, при верном ходе решения - 3 балла.

3. Решите уравнение $5x+2|x|=3x$
($|x|=x$ при $x\geq 0$ и $|x|=-x$ при $x<0$).

Решение

Преобразуем уравнение к виду

$$2x+2|x|=0$$

1)Решим уравнение при $x\geq 0$.

При $x\geq 0$ получаем

$$2x+2x=0$$
$$4x=0$$
$$x=0$$

Полученное значение x удовлетворяют условию $x\geq 0$. Значит, $x=0$ не является решением уравнения.

2) Решим уравнение при $x<0$.

При $x<0$ получаем

$$2x-2x=0.$$

Полученное равенство верно при любом значении x. Значит, решением будет любое число из рассматриваемого промежутка, т.е. $x<0$.

Учитывая оба случая, получаем решение уравнения: $x\leq 0$.

Критерии

Рассмотрен только первый случай и верно решен – 2 балла.

Рассмотрен только второй случай и верно решен – 3 балла.

Рассмотрены оба случая, но в каждом из них полученное уравнение не решено – 1 балл.

Первый случай решен верно, а во втором уравнение получено, но не сделан вывод о его решении или вывод неверный – 3 балла.

Второй случай решен верно, а в первом получено и решено уравнение, но не проверено выполнение условия $x\geq 0$, получен верный ответ – 5 баллов.

Допущена описка или арифметическая ошибка, не повлиявшая на ход решения и ответ, – 6 баллов.

Если решение верно, но ответ дан в виде $x < 0$, $x = 0$, то задача полностью засчитывается – 7 баллов.

4. Можно ли разбить выпуклый семнадцатиугольник на черные и белые треугольники так, чтобы любые 2 треугольника имели либо общую сторону, когда окрашены в разные цвета, либо общую вершину, либо не имели общих точек, а каждая сторона семнадцатиугольника являлась бы стороной одного из черных треугольников?

Решение

Пусть n - количество белых треугольников. Значит, $3n$ сторон белых треугольников, так как из условия следует, что одноцветные треугольники не имеют общих сторон.

Тогда $3n + 17$ сторон черных треугольников, так как любая сторона белого треугольника является в то же время стороной черного. Однако, $3n + 17$ не делится на 3, поэтому так разбить нельзя.

Критерии

Правильный вывод, полученный из рассмотрения любых конкретных примеров, оценивается в 0 баллов.

Решение верное, но в нем не сформулирован вывод о том, что одноцветные треугольники не имеют общих сторон и любая сторона белого треугольника является в то же время стороной черного - оценивается в 5 баллов.

5. Имеется кучка из 100 камней. Играют двое. За один ход можно взять из кучки 1, 2, 3 или 5 камней. Выигрывает тот, кто забирает последние камни. Как играть, чтобы выиграть?

Решение

Выигрывает второй, каждым своим ходом оставляя количество камней в кучке кратное четырем:

1) если первый берет 1 камушек, то второй - 3 камушка;
2) если первый берет 2 камушка, то второй - 2 камушка;
3) если первый берет 3 камушка, то второй - 1 камушек;
4) если первый берет 5 камушек, то второй - 3 камушка.

Ход первого игрока и ответ второго убирают в сумме 4 или 8 камушков. Последняя пара ходов делается либо с 4-х, либо с 8 камушков. Последний ход делает второй игрок.

Критерии

Полное решение содержит: указание, кто выигрывает (первый или второй игрок), описание выигрышной стратегии и ее доказательство.

Доказательством стратегии является тот факт, что этой стратегии возможно следовать, и она обязательно приводит к выигрышу.

При отсутствии какого-либо из этих компонентов в решении - 4 балла.

Примечание: анализ выигрышных позиций с конца считается доказательством стратегии.