МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

Государственное бюджетное учреждение
дополнительного образования
Краснодарского края
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОДАРЕННОСТИ»

350000 г. Краснодар,
ул. Красная, 76
тел. 259-84-01
E-mail: cro.krd@mail.ru

Всероссийская олимпиада школьников по математике

2017-2018 учебный год

Муниципальный этап

7 класс, ответы

Председатель предметно-методической комиссии: Лазарев В.А., д.п.н., профессор

1. Сразу после сбора урожая содержание воды в 1 тонне помидоров составляло 99%. К моменту продажи доля воды уменьшилась на 4% (после просушки). Чему стал равен суммарный вес помидоров?

Решение. Вес сухой массы в помидорах составляет 1% от 1 тонны – 10 кг. После просушки вес сухой массы не меняется и составляет 5% (100% – (99% – 4%)) от общей массы помидоров. Другими словами, общая масса составляет 200 кг.

Замечание. Возможно, учащемуся можно добавить 2 – 3 балла, если входе решения он догадался рассчитать вес сухой массы, но не стал его использовать для дальнейших рассуждений.

Ответ. 200 кг.

2. В ноябре 2017 года учитель решил провести 11 занятий по математике. Докажите, что найдутся три дня подряд, в которые не будет ни одного занятия по математике (суббота, воскресенье – выходные).

Решение. Докажем от противного. Пусть существует такое расписание, при котором в текущем ноябре не найдутся три дня подряд, в которое не будет занятий по математике. Тогда по пятницам и понедельникам обязательно должны быть уроки (так как суббота и воскресенье – выходные). Получаем 8 занятий в месяце (3.11, 6.11, 10.11, 13.11, 17.11, 20.11, 24.11, 27.11). Далее, чтобы не было от трёх и более дней без математики подряд, необходимо оставшиеся 3 занятия (11 – 8) распределить по одному между неделями (6.11 – 12.11, 13.11 – 19.11, 20.11 – 26.11, 27.11 – 30.11), что, очевидно, невозможно (принцип Дирихле).

Замечание. При доказательстве от противного утверждение, что в пятницу и понедельник должны быть занятия, можно отметить 1 баллом (не смотря на всю его очевидность).

3. Как за $3N - 2$ взвешиваний найти самый лёгкий и самый тяжёлый камни из $2N$ камней, любые два из которых отличаются по весу? Все взвешивания производятся на двухчашечных весах без гирь.

Решение. За N взвешиваний попарно взвешиваем все $2N$ камней. Те камни, которые оказались тяжелее, складывать в одну кучу, те, которые легче – в другую. В первой куче находится самый тяжёлый камень, его следующим образом: нумеруем камни числами от 1 до N, берём камни 1 и 2, взвешиваем их, выбираем камень с наибольшим весом и сравниваем его вес с камнем 3 и т. д. На $N - 1$ взвешивании сравнивается вес N-го камня и самого тяжёлого из предыдущих $N - 1$ камней. Таким образом, самый тяжёлый камень в первой куче гарантированно находим за $N - 1$ взвешивание. Аналогично находим самый лёгкий камень во второй куче. Всего потребуется $N + N - 1 + N - 1 = 3N - 2$.

Замечание. Возможно, у учащихся следует снимать по 1 – 2 балла за отсутствие описания алгоритма выбора самого лёгкого (самого тяжёлого камня).

4. Найдите два числа, сумма которых равняется 2017, а сумма чисел, записанных теми же цифрами, но в обратном порядке, равняется 8947.

Решение. Обозначим первое искомое число как $\overline{abcd}$, второе – $\overline{efgh}$. Причём эти числа таковы, что $\overline{abcd} \geq \overline{efgh}$. Заметим, d и h могут дать в сумме либо 7, либо 17. Если $d + h = 7$, тогда $\overline{abcd}$ и $\overline{efgh}$ – четырёхзначные, $c = g = 9$ (иначе $\overline{dcba} + \overline{hgfe} < 8900$), но в этом случае $\overline{abcd} + \overline{efgh} \neq 2017$, таким образом $d + h = 17$, причём второе число не четырёхзначное, иначе $\overline{dcba} + \overline{hgfe} > 17000$ (обозначим второе число как $\overline{fgh}$). Если $d + h = 17$, то одно из этих чисел будет 8, другое – 9. Очевидно, $d = 8$, $h = 9$. Далее, $c + g$ может равняться либо 10, либо 0, чтобы выполнялось $\overline{abcd} + \overline{fgh} = 2017$. Вне зависимости от этого $f > 0$, следовательно $a = 1$, следовательно $f = 6$ (из $\overline{dcba} + \overline{hgf} = 8947$). Если $f = 6$, тогда возможны два варианта: 1) $b = 4$ и $c = g = 0$, 2) $b = 3$ и $c + g = 10$. По второму варианту: если $b = 3$, тогда $g = 1$ (из $\overline{dcba} + \overline{hgf} = 8947$), тогда $c = 9$ – данный набор значений не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $b = 4$ и $c = g = 0$. Таким образом, $\overline{abcd} = 1408$, $\overline{fgh} = 609$.

Замечание. 1) Если учащийся установил, что одно из чисел должно быть трёхзначным, то ему можно начислить баллы (1 – 2).

Ответ: 1408, 609.

5. В ряд выписаны числа от 0 до 9. За одно действие мы можем либо добавить к двум соседним числам по 1, либо умножить три произвольных числа на 3. Можно ли с помощью допустимых действий над числами ряда сделать все числа равными?

Решение. Первоначально ряд содержит нечётное число (по 5) чётных и нечётных чисел. Рассмотрим, как будет меняться количество нечётных чисел (точнее, интересует чётность числа нечётных чисел) при выполнении допустимых действий. При выполнении первого действия количество нечётных чисел: 1) не измениться, если одно число было чётным, другое – нечётным; 2) уменьшится на 2, если оба числа были нечётными; 3) увеличится на 2, если оба числа были чётными. Другими словами, количество нечётных чисел остаётся нечётным вне зависимости от чисел, над которыми производилась действие. Заметим, что при выполнении второго действия количество чётных / нечётных чисел не меняется, так как чётность числа не меняется при его умножении на нечётное число. Было показано, что чётность числа чётных / нечётных чисел инвариантна относительно предложенных действий – число чётных / нечётных чисел в ряду всегда будет нечётным, следовательно, не может быть равным 0. Таким образом, условие задачи не может быть достигнуто – нельзя получить 10 равных чисел, используя допустимые действия.

Замечание. 1) Если учащийся выписывает утверждение, что в ряду будет хотя бы одно чётное / нечётное число без доказательства (например, выведенное эмпирически), можно наградить 2 – 3 баллами. 2) Если доказана инвариантность чётности числа чётных / нечётных чисел в ряду относительно только первого действия, можно поставить до 5 баллов. Относительно второго действия инвариантность доказывается легче – возможно, до 4 баллов.

Ответ. Данное условие не будет достигнуто.