ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

7 КЛАСС

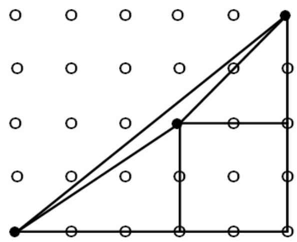
Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Все горизонтальные и вертикальные расстояния между соседними точками равны 1. Чему равна площадь треугольника с вершинами в чёрных точках?

Ответ. 1.



Решение. Площадь треугольника можно найти, например, вычитая из половины площади квадрата площадь квадрата и площади двух прямоугольных треугольников. Получаем $S = 10 - 4 - 2 - 3 = 1$. Можно разбивать фигуру и другими способами.

Комментарий*.* *Ответ без обоснования – 0 баллов. Сделано разбиение, позволяющее найти площадь, но вычисления отсутствуют – 2 балла. При правильном методе решения есть ошибки в вычислениях – снимать по 2 балла за каждую ошибку.*

2. У 1009 гномов было 2017 карточек, пронумерованных от 1 до 2017. У Ори была одна карточка, у каждого из остальных гномов – по две. Все гномы знали числа только на своих карточках. Каждый гном, кроме Ори, сказал: «Я точно знаю, что не могу отдать Ори никакую из своих карточек так, чтобы сумма чисел на его двух карточках стала равна 2018». Какое число на карточке у Ори?

Ответ. 1009.

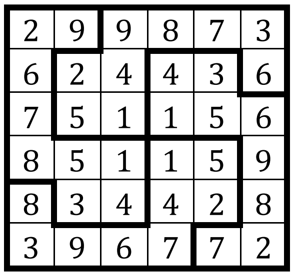
Решение. Если у одного из гномов есть карточка с числом 1, то он должен быть уверен, что у Ори нет карточки с числом 2017. В этом можно быть уверенным только тогда, когда карточка с числом 2017 тоже в руках у этого гнома. Точно так же, гном с карточкой, на которой написано число 2, имеет ещё и карточку с числом 2016, с карточкой, на которой стоит число 3, – ещё и карточку с числом 2015, и т. д. Все карточки у гномов разобьются на пары с суммой 2018. Но на такие пары разбиваются все карточки, кроме карточки с числом 1009. Именно она у Ори.

Комментарий. *Доказано, что у некоторых гномов карточки разбиваются на пары с суммой 2018 – 3 балла. Доказано, что все карточки у гномов разобьются на пары с суммой 2018, но ответ не найден – 5 баллов.*

3. Разрежьте квадрат 6×6 (см. рисунок) по линиям сетки на 4 равные части так, чтобы в каждой встречались все цифры. Части считаются равными, если их можно точно совместить при наложении друг на друга, при этом их можно только поворачивать.

2	9	9	8	7	3
6	2	4	4	3	6
7	5	1	1	5	6
8	5	1	1	5	9
8	3	4	4	2	8
3	9	6	7	7	2

Решение. См. рисунок.



Комментарий*. Приведен верный пример – 7 баллов. Верный рисунок является достаточным обоснованием ответа, за отсутствие текстовых пояснений баллы не снимать.*

4. Ваня записал четырёхзначное число, вычел из него двузначное число, результат умножил на двузначное число, поделил на сумму двух однозначных чисел, прибавил однозначное, результат поделил на сумму трёх однозначных чисел. Для записи всех чисел он использовал только одну цифру (не 0). В ответе Ваня получил целое число. Какое это число, и какую цифру мог использовать Ваня?

Ответ. 2017; цифра любая.

Решение. Обозначим цифру a. Получаем $\left(\frac{(\overline{aaaa}-\overline{aa})\cdot\overline{aa}}{a+a}+a\right):(a+a+a)$. Тогда

$$\overline{aaaa}-\overline{aa}=\overline{aa00}=a\cdot 1100 \;\Rightarrow\; \overline{aa}=a\cdot 11.$$

Числитель дроби равен $a\cdot 1100\cdot a\cdot 11 = a\cdot a\cdot 12100$. Дробь $\frac{(\overline{aaaa}-\overline{aa})\cdot\overline{aa}}{a+a}=a\cdot 6050$. Тогда выражение $\frac{(\overline{aaaa}-\overline{aa})\cdot\overline{aa}}{a+a}+a=6051\,a$. Поделив на $3a$, получаем 2017, и это верно при любой цифре $a\neq 0$.

Комментарий. *Найдено число для одной какой-нибудь цифры, которая и указывается в ответе – 2 балла. Найдено число для нескольких (но не всех) цифр, которые и указываются в ответе – 3-4 балла. Найдено число для нескольких (но не всех) цифр, и сделан, но не доказан вывод о том, что цифра любая – 5 баллов. Найдено число для любой цифры (в общем виде или полным перебором) – 7 баллов. При отсутствии решения за полезные продвижения – 1 балл.*

5. Великанам приготовили 813 бургеров, среди которых чизбургеры, гамбургеры, фишбургеры и чикенбургеры. Если трое из них примутся есть чизбургеры, то за это время двое великанов съедят все гамбургеры. Если пятеро возьмутся есть гамбургеры, то за это время шесть великанов съедят все фишбургеры. Если семеро станут есть фишбургеры, то за это время один великан может съесть все чикенбургеры. Сколько бургеров каждого вида было приготовлено великанам? (Время, за которое один великан съедает один бургер, не зависит от вида бургера, и все великаны едят с одной и той же скоростью.)

Ответ. 252 фишбургера, 36 чикенбургеров, 210 гамбургеров и 315 чизбургеров.

Решение. Пусть a, b, c и d – соответственно количества чизбургеров, гамбургеров, фишбургеров и чикенбургеров. По условию $a+b+c+d=813$. Утверждение, что пока трое едят чизбургеры, двое съедят все гамбургеры означает, что $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$. Аналогично выполняются равенства $\frac{b}{5}=\frac{c}{6}$ и $\frac{c}{7}=d$. Выразим все неизвестные через одну, например, через c. Имеем $d=\frac{c}{7}$, $b=\frac{5c}{6}$ и $a=\frac{3b}{2}=\frac{5c}{4}$. Тогда $\frac{5c}{4}+\frac{5c}{6}+c+\frac{c}{7}=813$, откуда $c=252$. Тогда $d=36$, $b=210$ и $a=315$.

Комментарий. *Ответ найден подбором и не показано, что нет других решений – 3 балла. За арифметические ошибки при верных рассуждениях снижать на 1-3 балла.*