7-й класс

7.1 У малыша Димы на два зуба больше, чем у малышки Юли. У боксера Коли зубов столько же, сколько у Димы и Юли, вместе взятых, но вдвое меньше, чем у биолога Вани. Всего на них четверых приходится 64 зуба. Сколько у кого зубов?

Решение: У Димы x зубов, у Юли $x-2$, у Коли $x+x-2=2x-2$, у Вани $2\cdot(2x-2)=4x-4$. Всего $x+x-2+2x-2+4x-4=8x-8=64$. $x=9$.

Количество зубов: Д − 9, Ю − 7, К − 16, В − 32.

7.2 В классе 33 ученика, а сумма их возрастов составляет 430 лет. Докажите, что в классе найдутся 20 учеников, сумма возрастов которых больше 260 лет.

Решение: Пусть $V_1 \ge V_2 \ge \ldots \ge V_{20} \ge V_{21} \ge \ldots \ge V_{33}$ − возрасты учеников, $A=V_1+V_2+\ldots+V_{20}$, $B=V_{21}+\ldots+V_{33}$. По условию $A+B=430$. Ясно, что $A \ge 20V_{20}$, $B \le 13V_{20}$, откуда $B \le \frac{13}{20}A$. Поэтому $A+\frac{13}{20}A \ge 430$, $\frac{33}{20}A \ge 430$, $A \ge \frac{430\cdot 20}{33}=\frac{430}{33}\cdot 20=\left(13+\frac{1}{33}\right)\cdot 20 > 13\cdot 20=260$.

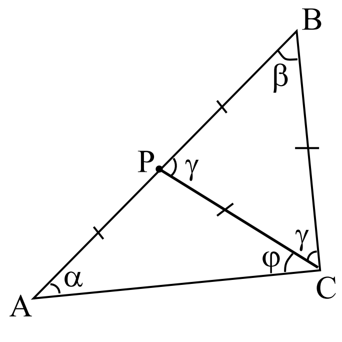
Т.о. сумма А возрастов 20 «самых возрастных» учеников больше 260.

7.3 Учитель изготовил 50 палочек длины 1,2,…,50 см и хочет разделить их между 25 мальчиками, дав каждому по две палочки. Мальчик будет рад, если половина одной его палочки окажется длиннее другой палочки. Сможет ли учитель разделить палочки так, чтобы все мальчики порадовались?

Ответ: не сможет.

Решение: Каждому мальчику должны достаться две палочки: одна длинная длины, скажем, a и короткая длины, скажем, b, причем, $\frac{a}{2} > b$, т.е. $a > 2b$. Так как $50 \ge a$, то $50 > 2b$, $b < 25$, т.е. $b \le 24$. Т.о. коротких палочек не больше 24, а мальчиков 25. Значит, кому-то короткая палочка неизбежно не достанется, и мальчик не будет рад.

7.4 В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 3\angle A$, и $AB = 2BC$. Докажите, что $\angle B = 60^{\circ}$.



Решение: См.рис. P − середина AB. Треугольник PBC − равнобедренный. Имеем: $\gamma=\alpha+\varphi$, $\varphi+\gamma=3\alpha$. Отсюда $\varphi+(\alpha+\varphi)=3\alpha$, т.е. $\varphi=\alpha$. Значит, треугольник APC − равнобедренный: $AP = CP$. Следовательно, треугольник PBC − равносторонний, и угол B равен 60°.

7.5 Натуральные числа от 1 до 2017 покрашены в два цвета (каждое в какой-то один). Числа 1 и 2017 − красные, 7 и 201 − синие. Докажите, что можно выбрать пару красных и пару синих чисел с одинаковыми суммами.

Решение: Пройдем с шагом 1 от красного числа 1 до синего числа 7. Где-то обязательно шагнем с красного числа на синее: a − красное, $a+1$ − синее. Аналогично пройдем от синего числа 201 до красного числа 2017. Где-то обязательно будет переход от синего числа b к красному числу $b+1$. Тогда пара красных чисел a и $b+1$ и пара синих чисел $a+1$ и b имеют одинаковые суммы.