Решения задач муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2017-18 уч. года

7 класс

7.1. Угол, образованный биссектрисой угла *ABC* с его сторонами, в 6 раз меньше угла, смежного к углу *ABC*. Найдите угол *ABC*.

Ответ: 45 градусов. **Решение**. Пусть x – градусная мера угла *ABC*. Из условия задачи получаем уравнение $\frac{x}{2}=\frac{180-x}{6}\Leftrightarrow 8x = 360 \Leftrightarrow x = 45$ (градусов).

7.2. Автомобиль, двигаясь с постоянной скоростью, доехал из пункта А до пункта В за 3 часа. Чтобы сократить время обратного пути, шофер выехал из пункта В со скоростью на 25% больше, а доехав до середины пути между А и В, увеличил скорость еще на 20%. Сколько времени займет обратная дорога?

Ответ: 2 часа 12 минут. **Решение**. Пусть длина пути из А в В равна a (км), а скорость движения из А в В равна v (км/ч). Тогда $\frac{a}{v}=3$. Пусть С – середина пути между А.и В. Тогда время движения на обратном пути от В до С равно $\frac{a/2}{v\cdot 1{,}25}=\frac{2}{5}\frac{a}{v}=\frac{6}{5}$ (час), а время движения от С до А равно $\frac{a/2}{v\cdot 1{,}25\cdot 1{,}2}=\frac{1}{3}\frac{a}{v}=1$ (час). Итак, время обратного пути $\frac{6}{5}+1=\frac{11}{5}$ (час).

7.3. Имеется 10 палочек длины 1, 2, 4, …,2^9 (см). Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить треугольник?

Ответ: нельзя. **Решение**. Предположим, от противного, что треугольник сложить можно, и пусть 2^n – длина наибольшей из палочек, участвующих в построении ($n\le 9$). Но тогда сторона треугольника, содержащая эту палочку, будет больше суммы двух других сторон, т.к. $2^n>1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$. Последнее равенство легко доказать: $2^n=2^{n-1}+2^{n-1}=$ $2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-2}=\ldots=2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+2=(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2+1)+1$. Полученное противоречие доказывает невозможность построения.

7.4. Существует ли шестизначное натуральное число, которое после умножения на 9 записывается теми же цифрами, но в обратном порядке?

Ответ: существует. **Решение**. Пусть $\overline{abcdef}$ – искомое число, т.е. $\overline{abcdef}\cdot 9=\overline{fedcba}$. Тогда очевидно a = 1, b = 0 (иначе при умножении на 9 получили бы семизначное число). Поэтому f = 9, а предпоследняя цифра e = 8 (что следует из умножения столбиком). Тогда третья цифра c может быть 8 или 9. Но если c = 8, то d = 1, т.к. сумма цифр делится на 9, однако число 108189 при проверке не подходит. Если же c = 9, то d = 9 и число 109989 – единственное, удовлетворяющее условию, и при проверке оно подходит.

7.5. В вершинах куба расставили в некотором порядке 8 чисел: 1, 2, …, 8, а затем для каждого из 12 ребер куба подсчитали сумму двух чисел на его концах. Докажите, что среди этих сумм есть совпадающие.

Решение. Предположим противное, тогда на ребрах будет 12 различных чисел среди возможных сумм: от минимальной, равной 3 = 1 + 2, до максимальной, равной 15 = 8 + 7. Таким образом, среди этих 13 возможных чисел есть только один пробел (не занятый суммами на ребрах). Если этого пробела нет среди чисел {3; 4; 5; 6}, то число 3 на ребре получается как сумма 1 + 2 на его концах. Далее, число 4 получается только как сумма 1 + 3 на концах, а число 5 получается как сумма 1 + 4 (представление 2 + 3 невозможно, т.к. вершины 2 и 3 уже определены как противоположные вершины в квадрате с вершинами 1, 2, 3). Наконец, получаем противоречие с числом 6, которое невозможно представить как сумму двух чисел, т.к. представление 6 = 1 + 5 противоречит тому, что из вершины 1 ведут всего 3 "использованные" ребра, а другое представление (6 = 2 + 4) невозможно в силу тех же аргументов, что и выше для представления 5 = 2 + 3. Полностью аналогичные рассуждения (только для самых больших возможных сумм) приводят к противоречию в случае, когда пробела нет среди чисел 15, 14, 13, 12.