Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2017-18 учебного года
7 класс (*Время решения – 3 часа)*

1. Маша вышла из дома в школу. Через несколько минут из этого же дома в школу выбежал Ваня. Он обогнал Машу на трети пути, и когда он прибежал в школу, Маше осталось пройти еще половину пути. Во сколько раз Ваня бегает быстрее, чем ходит Маша?

Решение. На трети пути Маша и Ваня были одновременно. После этого Ваня пробежал 2/3 пути, а Маша за это же время прошла ½ - 1/3 = 1/6 пути. Значит, он пробегает за одно и то же время в 2/3 : 1/6 = 4 раза больше, чем проходит Маша.

2. На олимпиаде по математике каждый из 11 семиклассников решил 3 задачи. Известно, что для любых двух из них есть задача, которую один из них решил, а другой нет. Докажите, что им было предложено не менее 6 задач.

Решение. Если задач не более 5, то различных наборов по 3 задачи не более 10. Значит, найдутся два семиклассника, решившие одинаковый набор задач. Противоречие условию.

Комментарий. Если разобран случай для 5 задач и не сказано, что для меньшего количества задач наборов меньше 10 – не более 5 баллов.

3. Докажите, что клетчатый квадрат размером 6×6 клеток нельзя разрезать на 11 различных фигур так, чтобы все клетки остались целыми. Фигуры считаются различными, если никакие две из них нельзя наложить друг на друга так, чтобы они совместились. Решение. Докажем, что 11 фигур не поместятся в этот квадрат по площади. Будем брать фигурки минимальной возможной площади. Очевидно, что есть всего одна фигурка пло- щади 1 и одна фигурка площади 2. Площади 3 есть уже две фигуры, а площади 4 целых пять различных фигур. Мы нашли 9 фигурок, площадь которых минимальна, но они уже заняли бы $1 + 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 = 29$ клеток. При другом наборе 9 фигурок займем больше 29 клеток. А всего клеток 36. Значит, на оставшиеся 7 клеток или меньше необходимо поместить 2 фигуры. Но это невозможно, т.к. мы уже использовали все фигуры площади меньше 5.

Комментарий. За попытку доказать нужный факт, рассмотрев какой-то один случай разрезания – 0 баллов.

4. На двух карточках записаны четыре различные цифры — по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, т. е. делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

Решение. Все двузначные числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6 или 8, чётны, а оканчивающиеся на 5 кратны пяти. Поэтому такие числа не будут простыми, и писать эти цифры на карточках не имеет смысла. Остаются цифры 1, 3, 7 и 9. Если цифры 3 и 9 записаны на разных карточках, то из них можно сложить составное число 39. Если же они записаны на одной карточке, то на второй записаны 1 и 7, и тогда можно сложить составное число $91 = 7 \cdot 13$.

Комментарий. Доказано, что цифры 0, 2, 4, 6, 8, 5 не записаны на карточках – 2 балла.

5. Какое наименьшее одинаковое число карандашей нужно положить в каждую из 6 коробок так, чтобы в любых 4 коробках нашлись карандаши любого из 26 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)? Докажите, что меньше невозможно.

Решение. Представим, что карандашей какого-нибудь цвета у нас меньше 3. Тогда если мы возьмем 4 коробки, в которых таких карандашей нет (а такие найдутся, т.к. карандашей не более 2ух), то условие задачи не выполнится. Значит карандашей каждого цвета не менее 3 и всего карандашей не менее, чем 26 * 3 = 78. Осталось сделать пример на 78. Давайте положим в первую, вторую и третью коробку по 13 карандашей цвета 1, 2, 3, …, 13 (пронумеруем цвета от 1 до 26). А в четвертую, пятую и шестую коробки – карандаши цвета 14, 15, …, 26. Тогда какие бы мы не взяли 4 коробки, мы обязательно возьмем карандаши всех цветов.

Комментарий. Только правильный ответ – 1 балл. Доказано, что карандашей не менее 78, но не приведен пример – 3 балла. Приведен пример на 78, но не доказано, что меньше быть не может – 3 балла.