

## Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательно краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставяемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады  
школьников по математике  
в 2017 – 2018 учебном году  
7 класс**

*Время выполнения заданий – 4 часа*

**7.1.** Проезжая по лесной дороге, Иван-царевич встретил медведя, лису и волка. Медведь всегда говорит правду, лиса всегда лжёт, а волк чередует правду и ложь, всегда начиная с правды. Звери сказали Ивану-царевичу по два предложения. Первый: «Ты коня спасёшь. Но сам погибнешь». Второй: «Ты целым-невредимым останешься. И коня спасёшь». Третий: «Ты цел останешься. А вот коня потеряешь». Определите, какому зверю принадлежит каждый ответ, и что ждёт Ивана-царевича впереди. Ответ обоснуйте.

**Решение:** Первые части высказываний таковы: «ты коня спасёшь», «ты целым — невредимым останешься», «ты цел останешься». Среди них должно быть два истинных и одно ложное, поэтому Иван выживает, а его конь — нет. Значит в первом высказывании неверны обе части, и первой была лиса. Аналогично находим, что вторым был волк, а третьим — медведь.

**Ответ:** Первое высказывание принадлежит лисе, второе — волку, третье — медведю. Иван-царевич останется жив, но без коня.

Рекомендации по проверке:

<b>есть в работе</b>	<b>баллы</b>
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Верно определена только судьба Ивана-царевича	4 балла
Приведён верный ответ, и показано, что он возможен, но не показано, что невозможны другие случаи	2 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

**7.2.** Пусть  $x$  и  $y$  — нецелые числа и  $\frac{1+y}{x-y} = x$ . Докажите, что числа  $x$  и  $y$  отличаются на 1.

**Решение:** Преобразуем уравнение (при  $x \neq y$ ) равносильным образом

$$\begin{aligned} \frac{1+y}{x-y} = x &\Leftrightarrow 1+y = x(x-y) \Leftrightarrow 1+y = x^2 - xy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1-x^2 = -y-xy \Leftrightarrow (1-x)(1+x) = -y(1+x). \end{aligned}$$

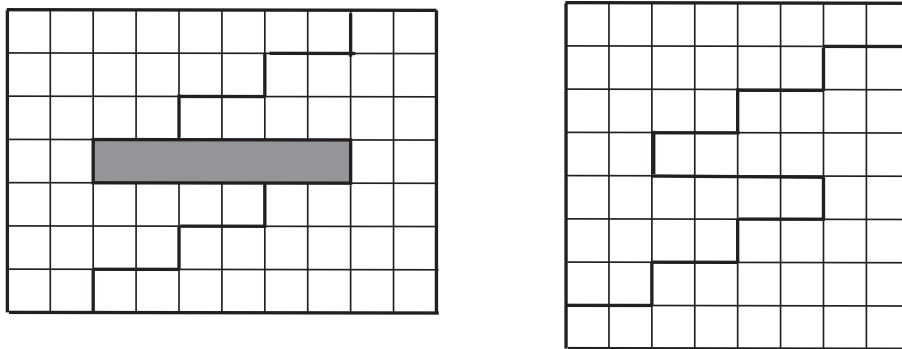
Так как число  $1+x$  отлично от 0 (иначе  $x = -1$  целое), то  $1-x = -y$  и  $x-y = 1$ . Утверждение доказано.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Просматривается верный ход решения, но оно не получено из-за ошибок в преобразованиях	2 балла
Выкладки, из которых не видно идей решения и/или иллюстрация утверждения конкретными примерами	0 баллов

**7.3.** В прямоугольнике  $10 \times 7$  вырезали центральный прямоугольник  $1 \times 6$  — см. рисунок. Разрежьте полученную фигуру на две части, чтобы из них можно было сложить квадрат  $8 \times 8$ . Покажите, как надо разрезать и как потом сложить.

**Решение:** Например, так, как показано на рисунке.



К решению задачи 7.3

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верно показано, как разрезать и как сложить	7 баллов
Приведён только верный пример разрезания, а как сложить — не показано	4 балла
Неверные примеры разрезаний (в любом количестве)	0 баллов

**7.4.** Серёжа записал на доске натуральное пятизначное число. Оказалось, что в этом числе среди любых двух соседних цифр больше та, которая стоит правее. Валера умножил это число на 9 и подсчитал сумму цифр полученного произведения. Найдите все значения, которые может принимать эта сумма. Ответ обоснуйте.

**Решение:** Пусть Серёжа записал число  $x = \overline{abcde}$ . Тогда  $10x = \overline{abcde0}$ . Заметим, что  $9x = 10x - x$  и выполним вычитание «столбиком»:

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e & 0 \\ \hline & & & & & & \\ \hline & a & b & c & d & e & \\ \hline a & (b-a) & (c-b) & (d-c) & (e-d-1) & (10-e) & \end{array}$$

В силу условия  $a < b < c < d < e$ , все выражения в скобках неотрицательны, следовательно, являются цифрами. Значит, Валера получил число

$$\overline{a(b-a)(c-b)(d-c)(e-d-1)(10-e)}$$

с суммой цифр  $a + b - a + c - b + d - c + e - 1 - d + 10 - e = 9$ .

**Ответ:** Только число 9.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Замечено, что ответ должен быть кратен 9 и доказано, что число в ответе не больше 45 при этом возможно, что верный ответ отсутствует	3 балла
Приведён верный ответ, подкреплённый примерами (в любом количестве), а единственность ответа не доказана	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

**7.5.** Серёжа и Валера вышли одновременно навстречу друг другу: первый из пункта С, а второй — из пункта В, расстояние между которыми 21 км. Серёжина собака Бобик начинает движение из пункта С вместе с Серёжей и бежит навстречу Валере. Встретив его, не переводя дух, мчится назад до встречи с Серёжей, после чего снова разворачивается и бежит навстречу Валере и т. д. Все они передвигаются по одной дороге, причем скорость Серёжи 4 км/час, Валеры — 3 км/час, а Бобика — 11 км/час. Какое общее расстояние (туда и обратно) пробежал Бобик? Ответ обоснуйте.

**Решение:** Скорость сближения пешеходов равна  $3+4 = 7$  км/ч, и они встретятся через  $21 : 7 = 3$  ч после начала движения. Непрерывно бегающий Бобик за это время пробежит  $3 \cdot 11 = 33$  км.

**Ответ:** 33 км..

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметических ошибок	6 баллов
Верно найдена и обоснована закономерность, по которой изменяется путь Бобика на каждом из участках: от Серёжи до Валеры и обратно	4 балла
Верно подсчитан путь Бобика на нескольких первых участках: от Серёжи до Валеры, от Валеры до Серёжи и т. д.	2 балла
Выкладки, из которых не видно идей решения и/или иллюстрация утверждения конкретными примерами	0 баллов

**7.6.** Пусть  $a, b, c$  — натуральные числа, причём произведение  $ab$  делится нацело на  $5c$ , произведение  $bc$  — нацело на  $13a$ , а произведение  $ca$  — нацело на  $31b$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ . Ответ обоснуйте.

**Решение:** Из условия  $ab$  делится нацело на  $5c$  следует, что из чисел  $a$  и  $b$  хотя бы одно делится нацело на 5. Если это число  $a$ , то из условия  $bc$  делится нацело на  $13a$ , следует, что на 5 делится также одно из чисел  $b$  или  $c$ ; если это число  $b$  — то на 5 также нацело делится хотя бы одно из чисел  $a$  или  $c$  (ввиду делимости  $ca$  на  $31b$ ). Итого, на 5 делятся по крайней мере два числа из чисел  $a, b, c$ . Аналогично, по крайней мере два из этих чисел делятся на 13 и два — на 31. Значит, произведение  $abc$  делится на  $5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2 = 2015^2 = 4060225$ . Значит,  $abc \geq 4060225$ . Пример  $a = 5 \cdot 31 = 155, b = 5 \cdot 13 = 65, c = 13 \cdot 31 = 403$  показывает, что полученная оценка достигается.

**Ответ:**  $5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2 = 2015^2 = 4060225$ .

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Замечено, что ответ должен быть кратен 9 и доказано, что число в ответе не больше 45 при этом возможно, что верный ответ отсутствует	3 балла
Приведён верный ответ, подкреплённый примерами (в любом количестве), а единственность ответа не доказана	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов