Математика, 7 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При проверке работ следует руководствоваться следующими важными принципами:

1. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

2. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты.

3. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

4. Недопустимо выставлять баллы «за старание участника», в том числе за запись в работе сколь угодно большого по объему текста, не содержащего полезных продвижений в решении задачи.

5. При проверке результата выполнения каждого задания в работе участника олимпиады более высоким приоритетом обладают критерии оценки конкретного задания, приведенные в материалах для жюри.

6. Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Решения и указания по проверке

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы), за отличие от приведенных ниже возможных вариантов рассуждений. ***При этом оценка «7 баллов» ставится за любое верное (!) решение.***

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

1. Дима выписал три последовательных натуральных числа, из которых первое (меньшее) делится на 5, второе делится на 4, а третье делится на 3. Какие числа могли быть выписаны у Димы? (Укажите хотя бы один пример.)

Решение:

Например, годится такой пример: 55, 56, 57 (это три наименьших натуральных числа с нужным свойством). Дойти до него можно разными путями. Во-первых, работает осмысленный перебор: первое число должно быть кратным 5, при этом нечетным (чтобы следующее делилось на 4), поэтому первое число заканчивается на 5, – перебираем 5, 15, 25, 35, 45 не подходят (то следующее число на 4 не делится, то через одно не делится на 3), а 55 подходит. Во-вторых, можно так: по условию n делится на 5, $n + 1$ делится на 4, $n + 2$ делится на 3, откуда легко получить, что $n + 5$ делится и на 5, и на 4, и на 3 – подходит, к примеру, НОК(5, 4, 3) = 60, откуда $n = 55$. Конечно, есть и другие примеры (допустим, 115, 116, 117 или 655, 656, 657).

Естественно, в решении участников олимпиады это не требуется – для полного балла достаточно просто предъявить хотя бы один пример

<u>Критерии</u>:

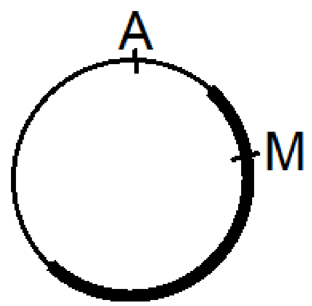
Верный пример трех таких чисел – 7 баллов,

нет верного примера – 0 баллов (в том числе неверным считается пример трех чисел, из которых какие-то удовлетворяют условию, а какие-то не удовлетворяют).

2. Усейн бежит один круг по школьному стадиону с постоянной скоростью, а рядом с кругом расположились фотографы – Арина и Марина. После старта в течение 4 секунд Усейн был ближе к Арине, потом в течение 21 секунды он был ближе к Марине, а потом до самого финиша снова ближе к Арине. За какое время Усейн пробегает целый круг?

Решение:

Несложно убедиться, что вне зависимости от положения Арины и Марины весь круг школьного стадиона делится на две равные по длине части – половину круга Усейн ближе к Арине и ровно половину круга Усейн ближе к Марине (это половина короткой дуги между Ариной и Мариной и половина длинной дуги между Ариной и Мариной – выделена толстой линией на схеме справа). Стало быть, его путь по участку, где он ближе к Марине, – это половина всего круга. Это расстояние он преодолел за 21 секунду, поэтому весь круг преодолеет за 42 секунды.

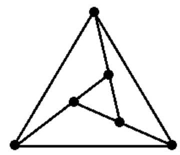


<u>Критерии</u>:

Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием – 2 балла.

Неверным считается в том числе обоснование, основанное на частном случае расположения Арины, Марины и Усейна в момент старта (к примеру, если автор работы располагает их в противоположных точках круга, а Усейна на середине дуги между ними).

3. Футболист может передать мяч другому футболисту, если на соединяющем их отрезке нет других футболистов. Можно ли расставить на поле 6 футболистов, чтобы каждый мог передать мяч ровно 4 другим футболистам?



Решение:
Можно. Пример на чертеже справа.

Критерии:
Верный пример расположения футболистов – 7 баллов,
нет верного примера – 0 баллов (неверным считается пример расстановки футболистов, когда хотя бы для одного футболиста количество тех, кому он может отдать мяч, не равно 4).

4. Авоська и Небоська собрали 64 ореха и выложили их в ряд так, что каждые два соседних ореха отличаются на 1 грамм. Докажите, что тогда они смогут разделить все орехи между собой так, чтобы им досталось поровну орехов и по количеству, и по массе.

Решение:
Разобьем все орехи на четверки орехов, стоящих подряд. Рассмотрим любую из этих четверок. Пусть масса первого ореха в этой четверке равна m, тогда возможны следующие варианты масс четырех орехов (в граммах):

(1) m, $(m + 1)$, $(m + 2)$, $(m + 3)$ или m, $(m -1)$, $(m - 2)$, $(m - 3)$;
(2) m, $(m + 1)$, $(m + 2)$, $(m + 1)$ или m, $(m -1)$, $(m - 2)$, $(m - 1)$;
(3) m, $(m + 1)$, m, $(m + 1)$ или m, $(m -1)$, m, $(m - 1)$;
(4) m, $(m + 1)$, m, $(m - 1)$ или m, $(m -1)$, m, $(m + 1)$.

В каждом из случаев четверка орехов разбивается на две пары с равной суммой масс. Действительно: (1) и (3) I + IV = II + III; 2), 4) I + III = II + IV (римскими цифрами обозначены массы орехов по порядку). Следовательно, из каждой четверки можно положить два ореха в одну кучку, а две других – в другую кучку. Разбиение, осуществленное таким образом, будет искомым.

Объяснить, что любая четверка орехов, стоящих подряд, разбивается на две пары с равными суммами масс можно и без разбора различных случаев: положим первые два ореха в разные кучки (более тяжелый – в первую кучку, а более легкий – во вторую) и следующие два ореха также положим в разные кучки, но наоборот (более легкий – в первую кучку, а более тяжелый – во вторую). Так как модуль разности между массами первого и второго ореха равен модулю разности между массами третьего и четвертого ореха, то такое разбиение будет искомым.

Критерии:
Верно обоснованный алгоритм распределения орехов – 7 баллов.
Есть идея распределения орехов по четверкам, не доведенная до конца (например, в переборном решении разобраны не все случаи), – ставить 2 балла.
Обратите внимание, что неверным считается в том числе решение, основанное на неполном переборе случаев или рассмотрении одного частного случая (например, когда каждый следующий орех на 1 тяжелее предыдущего).

5. На доске все натуральные числа от 1 до 100: 1, 2, 3, 4, …, 99, 100. Каждый ученик, вошедший в класс, обводит в кружок те числа, которые не делятся ни на одно из других записанных чисел, а потом стирает все обведенные числа (очевидно, первый вошедший ученик сотрет только число 1). Когда какие-то числа стер Карл, то больше чисел на доске не осталось. А какие числа он стер?

Ответ: 64 и 96.

Решение:

На следующем этапе после стирания единицы будут стерты все простые числа (у них нет делителей, кроме 1 и самого числа). Далее будут стерты числа, в разложение которых входит ровно два простых множителя (необязательно различных), затем стерты числа, в разложение которых входит ровно три простых множителя, и так далее. Так как $2^7 > 100$, то среди записанных на доске чисел нет таких, в разложение которых входит больше шести простых множителей. Следовательно, на последнем шаге будут стерты числа, в разложение которых входит ровно шесть простых множителей. Так как $3^2 \cdot 2^4 > 100$, то таких чисел всего два: $2^6 = 64$ и $3 \cdot 2^5 = 96$.

<u>Критерии:</u>

За присутствующую в решении идею, что на k-м этапе стираются числа, имеющие в разложении k простых множителей, уже ставить 2 балла.