8 класс

1. Все домовые любят пошалить. Все домовые любят чистоту и порядок. Каждый, кто любит чистоту и порядок, не любит шалить. Обязательно ли тогда, домовых не существует?

Решение

1-й способ.

1) Из условий «Все домовые любят чистоту и порядок» и «Каждый, кто любит чистоту и порядок, не любит шалить» следует, что «Все домовые не любят шалить» (Из «Если А, то В» и «Если В, то С» следует, что «Если А, то С»).

2) Из условий «Все домовые любят пошалить» и «Все домовые не любят шалить» следует, что домовых не существует (Из «Если А, то В» и «Если А, то не В» следует не А).

2-й способ.

Выпишем все комбинации существ в отношении владения тремя свойствами: быть домовым, любить пошалить, любить чистоту и порядок.

9) Домовой, любит шалить, любит чистоту и порядок;
10) домовой, любит шалить, не любит чистоту и порядок;
11) домовой, не любит шалить, любит чистоту и порядок;
12) домовой, не любит шалить, не любит чистоту и порядок;
13) не домовой, любит шалить, любит чистоту и порядок;
14) не домовой, любит шалить, не любит чистоту и порядок;
15) не домовой, не любит шалить, любит чистоту и порядок;
16) не домовой, не любит шалить, не любит чистоту и порядок.

Условие «Все домовые любят пошалить» исключает домовых, которые шалить не любят, то есть случаи 3 и 4.

Условие «Все домовые любят чистоту и порядок» исключает домовых, которые не любят чистоту и порядок, то есть случаи 2 и 4.

Условие «Каждый, кто любит чистоту и порядок, не любит шалить» исключает любящих чистоту и порядок и шалить, то есть случаи 1 и 5.

Таким образом, все перечисленные условия выполняются только на случаях 6, 7 и 8. Во всех этих случаях заявлен не домовой. Значит, логический вывод о том, что домовых не существует, верен.

Критерии

Задача, решенная 2-м способом, оценивается в 7 баллов.

Задача, решенная 1-м способом и с обоснованиями, в которых четко прослеживаются правила логического вывода (Из «Если А, то В» и «Если В, то С» следует, что «Если А, то С»; Из «Если А, то В» и «Если А, то не В» следует не А) оценивается в 7 баллов (Достаточно, чтобы правила логического вывода описывались в формулировках задачи, а не в обобщенной форме).

Если в обоснованиях указанные правила логического вывода не прослеживаются, то за каждое правило снимается 3 балла.

В 1-м способе во 2-м пункте считать достаточным обоснование: При условии, что домовые существуют, получили противоречащие друг другу свойства (качества) домовых: «любят шалить» и «не любят шалить».

2. Три бегуна одновременно стартуют на круговой трассе на равных расстояниях друг от друга (находятся в вершинах вписанного правильного треугольника). Скорости первого, второго и третьего бегунов относятся как 1:2:4 соответственно (в момент старта второй бежит за первым, третий за вторым, первый за третьим). Могут ли они все трое встретиться в одной точке во время бега?

Решение

Пусть а - треть длины круговой трассы, x, $2x$, $4x$ - скорости бегунов, n и k - целое число оборотов. Получаем уравнение

$$\frac{a+3an}{2x-x} = \frac{2a+3ak}{4x-x} \quad (*),$$

которое приводим к виду

$$3k - 9n = 1 \quad (**)$$

При любых целых n и k в левой части уравнения получаем число, делящееся нацело на 3, а в правой части уравнения стоит 1 - число, не делящееся на 3. Поэтому уравнение не имеет решений в натуральных числах. Значит, все три бегуна в одной точке трассы никогда не окажутся.

Критерии

Получено только общее уравнение (*) движения бегунов - решение оценивается в 3 балла.

Получено общее уравнение (*) движения бегунов и это уравнение приведено к виду (**), дальнейшее решение неправильное или отсутствует - решение оценивается в 4 балла.

Только рассмотрение любых частных случаев и правильный ответ - 0 баллов.

Рассмотрен порядок движения по кругу, не соответствующий описанному в условии задачи (т.е. получено уравнение $\frac{2a+3an}{2x-x} = \frac{a+3ak}{4x-x}$), дальнейшее решение задачи верное и полное - 6 баллов. В случае наличия ошибок оценивать как и для правильного направления движения.

3. Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин этого четырехугольника минимальна.

Решение

Это точка пересечения диагоналей этого четырехугольника.

Докажем, что сумма расстояний от любой другой точки до вершин четырехугольника будет больше.

Пусть M - точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника ABCD, N - точка внутри этого четырехугольника, не совпадающая с M.

В треугольнике ACN по неравенству треугольника AN+CN≥AC, то есть AN+CN≥AM+CM.

В треугольнике BDN по неравенству треугольника BN+DN≥BD, то есть BN+DN≥BM+MD.

Знак ≥ поставлен потому, что точка N может лежать на одной из диагоналей. При этом заметим, что если одно неравенство выполняется как равенство (точка N лежит на соответствующей диагонали), то другое неравенство выполняется как строгое неравенство.

Таким образом, получаем AN+CN+ BN+DN> AM+CM+ BM+MD.

Критерии

Только правильный ответ - 1 балл.

Все неравенства рассмотрены как строгие - 5 баллов.

Все исходные неравенства рассмотрены как нестрогие, но не обоснована строгость итогового неравенства - 6 баллов.

4. Докажите, что $1+2+3+\cdots+(2n-1)$ делится на $(2n-1)$ при любом натуральном n.

Решение

Выражение представляет собой сумму $2n-1$ последовательных натуральных чисел, последнее число нечетное.

Без последнего числа $(2n-1)$ в сумме четное число слагаемых. Разобьем их на пары крайних, то есть 1 и $(2n-2)$, 2 и $(2n-3)$ и т.д. Сумма в каждой паре равна $(2n-1)$. Тогда сумма $1+2+3+\cdots+(2n-2)=k(2n-1)$, где k – натуральное число (количество пар), то есть эта сумма делится на $(2n-1)$.

Значит, выражение $1+2+3+\cdots+(2n-1)=k(2n-1)+(2n-1)=(2n-1)(k+1)$ делится на $(2n-1)$.

Критерии

Общий вывод из рассмотрения частных случаев - 0 баллов.

Идея доказательства верная, но доказательство содержит ошибки или описки в преобразованиях, в результате чего делимость не доказана - 3 балла.

В решении допущена ошибка или описка, не повлиявшая на возможность доказать делимость и делимость доказана - 5 баллов.

5. Имеется кучка из 100 камней. Играют двое. За один ход можно взять из кучки 1, 2, 3 или 5 камней. Выигрывает тот, кто забирает последние камни. Как играть, чтобы выиграть?

Решение

Выигрывает второй, каждым своим ходом оставляя количество камней в кучке кратное четырем:

1) если первый берет 1 камушек, то второй - 3 камушка;
2) если первый берет 2 камушка, то второй - 2 камушка;
3) если первый берет 3 камушка, то второй - 1 камушек;
4) если первый берет 5 камушек, то второй - 3 камушка.

Ход первого игрока и ответ второго убирают в сумме 4 или 8 камушков. Последняя пара ходов делается либо с 4-х, либо с 8 камушков. Последний ход делает второй игрок.

Критерии

Полное решение содержит: указание, кто выигрывает (первый или второй игрок), описание выигрышной стратегии и ее доказательство.

Доказательством стратегии является тот факт, что этой стратегии возможно следовать, и она обязательно приводит к выигрышу.

При отсутствии какого-либо из этих компонентов в решении - 4 балла.

Примечание: анализ выигрышных позиций с конца считается доказательством стратегии.