Ключи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике
2017-2018 учебный год
8 класс

Максимально возможное количество баллов за каждое задание: 7 баллов
Максимально возможное количество баллов за работу: 35 баллов

Критерии оценивания заданий:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1. Заседание комиссии началось в 13 часов, а закончилось между 16 и 17 часами. Найти точное время длительности заседания, если известно, что в конце заседания часовая и минутная стрелки на циферблате часов были направлены в противоположные стороны.
Ответ: 43/11 часа
Решение.
Пусть t – искомое время в часах. Конечное положение минутной стрелки показывает, что она прошла 3 полных оборота, затем 1/12 часа до исходного положения часовой стрелки, затем путь часовой стрелки за время t/1, поскольку она движется в 12 раз быстрее часовой стрелки, затем еще 1/2 часа, поскольку минутная и часовая стрелка направлены противоположно в конце заседания. Следовательно,
$t = 3+ 1/12 + t/12 + 1/2;$
$t = 43/11$ ч.

Задача 2. Замените в выражении $(x^4-3)^2+\left(x^3+*\right)^2$ звёздочку (*) на одночлен так, чтобы после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых получилось четыре слагаемых**.**
Решение.
Заменим * на 3х:
$(x^4 - 3)^2 + (x^3 + 3x)^2 = x^8 – 6x^4 + 9 + x^6 + 6x^4 + 9x^2 = x^8 + x^6 + 9x^2 + 9$
Возможен и другой ответ. Например, $\sqrt{6}x^2$
Анализ решения: Проанализируем ситуацию в предположении, что коэффициент при одночлене может быть отрицательным (слагаемое может быть одночленом с отрицательным коэффициентом).
После раскрытия первой скобки образуются три слагаемых: x^8; – $6x^4$; 9. Посмотрим, как может измениться сумма после раскрытия второй скобки:
1) если сумма во второй скобке равна 0, то слагаемых будет только три.
2) Если сумма во второй скобке является ненулевым одночленом 9т.е. * заменена на одночлен вида ax^3, где $a \neq -1$), то к общей сумме добавится одночлен степени 6, а так как среди имеющихся таких нет, то получится 4 слагаемых: x^8, $-6x^4$, 9, $(a+1)^2x^6$
3) Если степень одночлена не равна 2, то после возведения второй скобки в квадрат появится еще три слагаемых, итого получится шесть слагаемых. Чтобы после приведения подобных их осталось 4, либо одно из трех новых слагаемых должно сократиться с одним из трех

имеющихся, либо степени двух слагаемых из первой тройки должны совпадать с двумя слагаемыми из второй. Очевидно. Что с 9 сократиться ничего не может. Если сократится член x^8, то *= $-x^5/2$. Если сократится $-6x^4$, то *=3x или *=$\sqrt{6}x^2$.

Рассмотрим случай совпадения двух пар степеней. Степени слагаемых первой тройки 0, 4, 8. Во второй тройке степени 3, *к+3*, *2к* (где к – степень *). Очевидно, что *2к* и *к+3* одновременно не могут равняться каким-то двум из чисел 0, 4, 8.

Таким образом, * можно заменить на одночлены ax^3, $a \neq -1$, $-x^5/2$, 3x, $\sqrt{6}x^2$ и во всех этих случаях после приведения подобных слагаемых итоговая сумма будет состоять из 4 слагаемых. Заметим, что это будет сумма с положительными коэффициентами только в случае замены * на 3x или $\sqrt{6}x^2$

Критерии проверки:

- Для правильного решения достаточно привести один верный ответ и проверить, что он подходит. Верное решение – 7 баллов.
- Верно найден одночлен. Верное решение с одной ошибкой (опиской0 при возведении в квадрат – 4 балла.
- Найден одночлен, но не объяснено, почему он является решением – 2 балла.

Задача 3. Докажите, что число $9^{8n+4} - 7^{8n+4}$ делится на 20 при всех натуральных n.

Решение.

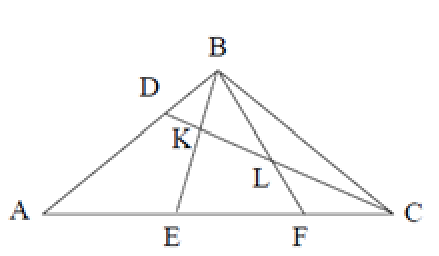
$9^{8n+4} – 7^{8n+4}= (9^{4n+2} – 7^{4n+2}) (9^{4n+2}+7^{4n+2}) = (9^{4n+2} – 7^{4n+2}) (81^{2n+1}+49^{2n+1})$.

В первой скобке стоит разность двух нечетных чисел, которая является чётным числом. Во второй скобке первая степень оканчивается на единицу, а вторая на 9, так как показатель этой степени нечетный. Тогда их сумма оканчивается нулем, то есть делится на 10. Произведение четного числа и числа, кратного 10, делится на 20.

Критерии проверки

- Есть идея разложения на множители по формуле разности квадратов, но решение не доведено до конца – 1 балл;
- Доказана делимость на 10 – 3 балла.

Задача 4. В треугольнике ABC CD – биссектриса угла ACB, AB = BC, BD = BK, BL = CL. Докажите, что BF – биссектриса угла CBE.



Решение.

Обозначим $\angle BCD = \angle DAC = x$. Тогда $\angle BAC = 2x$.
$\angle BDC = \angle DAC + \angle DCA = 3x \Rightarrow \angle BKD = 3x$ (треугольник BDK – равнобедренный). Для треугольника ВКС $\angle BKD$ – внешний, откуда $\angle KBC = \angle BKD - \angle BCK = 2x$. Так как BL = LC, $\angle LBC = \angle BCL = x$, т.е. BL – биссектриса в треугольнике KBC, а значит BF – биссектриса угла CBE.

Задача 5. Имеется 11 пустых коробок. За один ход можно положить по одной монете в какие-то 10 из них. Играют двое, ходят по очереди. Побеждает тот, после хода которого впервые в одной из коробок окажется 21 монета. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Выигрывает второй

Решение.

Занумеруем коробки: 1, . . ., 11 и будем обозначать ход номером той коробки, куда мы не клали монету. Можно считать, что первый игрок начал игру ходом 1. Чтобы победить, второму надо, независимо от игры первого, сделать ходы 2, . . ., 11. Этими десятью ходами вместе с ходом первого в каждую коробку будет положено по 10 монет. Кроме того, найдется коробка (назовем ее *A*), в которую первый каждым своим ходом со 2 по 11 клал по монете. Тем самым, после 11 хода первого в коробке *A* окажется 20 монет, и ни в какой коробке не окажется больше. Второй игрок своим 11-м ходом должен положить монеты так, чтобы в коробку *A* попала монета. Тем самым, он выигрывает.