

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И МОЛОДЕЖНОЙ ПОЛИТИКИ
КРАСНОДАРСКОГО КРАЯ

Государственное бюджетное учреждение
дополнительного образования
Краснодарского края
«ЦЕНТР РАЗВИТИЯ ОДАРЕННОСТИ»

350000 г. Краснодар,
ул. Красная, 76
тел. 259-84-01
E-mail: cro.krd@mail.ru

Всероссийская олимпиада школьников
по математике

2017-2018 учебный год

Муниципальный этап

8 класс, ответы

Председатель предметно-методической
комиссии: Гайденок С.В., к.ф.-м.н., доцент
Составители заданий:
Федоренко И.В., к.ф.-м.н.,
Тугуз Т.К., преподаватель

1. Давным-давно девять одинаковых книг стоили 11 рублей с копейками, а тринадцать таких книг стоили 15 рублей с копейками. Сколько стоила одна книга?

Из первого условия следует, что одна книга стоит больше 122 копеек, иначе $122 \cdot 9 = 1098 < 1100$. Из второго условия следует, что одна книга стоит меньше 124 копеек, иначе $124 \cdot 13 = 1612 > 1599$. Таким образом, цена одной книги равна 123 копейкам.

Ответ: 123 копейки.

Критерии: правильный ответ без обоснования - 2 балла.

2. В ряд по возрастанию выписано 10 натуральных чисел так, что каждое из чисел, кроме первого делится на какое-нибудь из предыдущих. Первое число не равно 1, а сумма всех 10 чисел равна 275. Восстановите эти числа.

Пусть первое выписанное число равно x , тогда каждое из 9 оставшихся чисел обязательно делится на x , а значит и сумма всех чисел также делится на x . Таким образом, x должен быть делителем числа $275 = 5^2 \cdot 11$.

Если x больше 5, то наименьшее возможное значение суммы будет $11 + 11 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + \dots + 11 \cdot 9 + 11 \cdot 10 = 605$, что уже больше 275. Значит подойдет только $x = 5$. В этом случае подойдет лишь минимально возможная сумма чисел $5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + \dots + 5 \cdot 9 + 5 \cdot 10 = 275$.

Ответ: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.

Критерии: правильный ответ без обоснования - 2 балла.

3. В треугольнике ABC провели биссектрисы углов A и C . P и Q - основания перпендикуляров из вершины B на эти две биссектрисы. Доказать, что отрезок PQ параллелен стороне AC .

Пусть P - основание перпендикуляра на биссектрису угла C , а Q - на биссектрису угла A . Пусть прямая BP пересекает прямую AC , в точке K , а

прямая BQ пересекает прямую AC в точке L . Отрезок CP является биссектрисой и высотой в треугольнике CBK , а значит он является и медианой в этом треугольнике. Значит $BP = PK$. Аналогично доказывается, что $BQ = QL$. Таким образом, отрезок PQ является средней линией в треугольнике BKL , а значит он параллелен KL .

4. На двери сейфа расположено 15 выключателей. У каждого выключателя есть два возможных состояния - "включен" и "выключен", но по виду выключателя невозможно определить, в каком положении он находится. За один рубль разрешается переключить один выключатель. Дверь откроется, если ровно 8 выключателей окажутся в положении "включен". Как гарантировано открыть сейф, потратив не более 15 рублей?

Поочередно переключим все 15 выключателей по одному разу. Докажем, что в какой-то момент дверь сейфа открылась. Заметим, что после каждого действия количество выключателей в положении "включен" изменяется ровно на 1. Пусть первоначально количество выключателей в положении "включен" было x , тогда после завершения всех операций их будет $15 - x$. Значит все значения от x до $15 - x$ "включенных" выключателей будут достигаться при переключении всех выключателей. Осталось заметить, что одно из чисел x и $15 - x$ обязательно меньше 8, а другое - не меньше 8. Таким образом, настанет момент, когда будут "включены" ровно 8 выключателей.

5. Какое наибольшее число сторон может иметь многоугольник, каждый угол которого равен либо 172° , либо 173° ?

Пусть количество углов с градусной мерой 172° будет a , а с градусной мерой 173° - b . Тогда сумма всех углов многоугольника будет равна $172a + 173b$. С другой стороны, сумма углов выпуклого n -угольника равна $180(n - 2)$. То есть должно быть верно равенство:

$$172a + 173b = 180(a + b - 2), \text{ или } 8a + 7b = 360. \quad 7(a + b) + a = 360$$

Сумма $a + b$ достигает максимального значения, когда a будет минимально. Наименьшее возможное значение $a=3$. Тогда $a + b = 51$.

Ответ: 51.

Критерии: правильный ответ без обоснования - 2 балла.