ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2017-2018 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

8 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

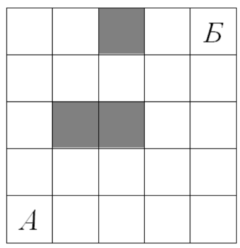
1. Вася утверждает, что нарисовал прямоугольник на клетчатой бумаге, который можно разрезать по сторонам клеток на одну полоску 1×37 клеток и 135 трёхклеточных уголков. Прав ли Вася?

Ответ. Вася не прав.

Решение. Если бы такой прямоугольник существовал, его площадь составляла бы $37 + 135 \cdot 3 = 442$ клетки. Чтобы из прямоугольника можно было вырезать полоску 1×37, одна из его сторон должна быть не короче 37. Так как $442 = 2 \times 13 \times 17$, нам подойдут только прямоугольники 1×442 и 2×221. Но из первого нельзя вырезать ни одного уголка, а у второго участок, из которого нельзя вырезать ни одного уголка, образуется после вырезания полоски 1×37.

Комментарий. *Ответ без обоснования – 0 баллов. Найдена площадь нарисованного прямоугольника – 1 балл. Рассмотрены некоторые конкретные примеры прямоугольников – не более 3 баллов.*

2. Катя начертила мелом на асфальте фигуру (см. рисунок) и прыгает на одной ножке из клетки в клетку. Ей надо допрыгать из клетки А в клетку Б. За один прыжок она может передвинуться либо на одну клетку вправо, либо вперёд, либо на одну клетку по диагонали – вправо и вперёд. В закрашенных клетках лужи, и туда Катя не может прыгать. Сколькими различными путями Катя может попасть из А в Б?



Ответ. 84.

Решение. В каждой клетке запишем число, равное количеству разных путей для попадания в эту клетку. Для этого надо прибавить аналогичные числа соседних (снизу, слева и по диагонали) клеток. В клетку Б ведут $16 + 14 + 54 = 84$ пути.

1	4		16	Б
1	2	2	14	54
1			12	28
1	3	5	7	9
А	1	1	1	1

Комментарий. *Обоснованно найдено верное число путей – 7 баллов. При правильном методе решения есть ошибки в вычислениях – снимать по 1 баллу за каждую ошибку. Учтена только часть путей – максимум 3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

3. Числа $1, 2, 3, \ldots, 29, 30$ записали в ряд в произвольном порядке, и посчитали частичные суммы: первая сумма S_1 равняется первому числу, вторая сумма S_2 равняется сумме первого и второго чисел, S_3 равняется сумме первого, второго и третьего чисел, и т.д. Последняя сумма S_{30} равняется сумме всех чисел. Каково наибольшее возможное количество нечётных чисел среди сумм $S_1, S_2, \ldots, S_{30}$?

Ответ. 23.

Решение. Оценка: прибавление нечётного числа меняет чётность суммы, нечётных чисел 15, следовательно, чётность сумм меняется не менее 14 раз. Значит, будет не менее 7 чётных сумм, тем самым, не более 23 нечётных сумм.

Реализация: расположим числа так: 1, потом все чётные, потом все остальные нечётные (кроме 1). Получим ряд: $1, 2, 4, 6, \ldots, 30, 3, 5, \ldots 29$. Нечётными являются первая сумма (равная 1), последующие 15 (так как они образуются прибавлением к 1 чётного числа), и 7 из последних 14 сумм ($S_{18}, S_{20}, \ldots, S_{30}$). Всего нечётных сумм $1 + 15 + 7 = 23$.

Комментарий. *Предложена реализация – 3 балла, сделана оценка – 4 балла, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*

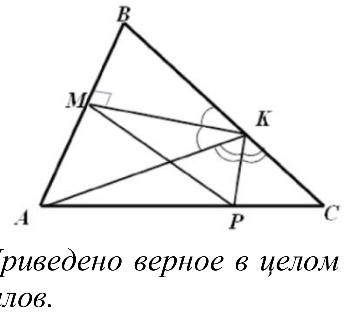
4. На доске записано трёхзначное число, в записи которого нет нулей. Сумма всех различных чисел, которые получаются перестановками цифр из написанного числа, равна 2775. Какое число могло быть записано на доске?

Ответ. 889, 988, 898, 997, 799, 979.

Решение. Число на доске не могло записываться тремя одинаковыми цифрами, ведь тогда на доске записано 2775, которое не является трехзначным. Но тремя различными цифрами оно тоже не могло записываться, так как тогда каждая цифра в разряде единиц входила бы в два числа, и сумма получилась бы чётной. Значит, исходное число записывается двумя различными цифрами a и b, что приводит к равенству $\overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} = 2775$. При сложении этих чисел мы получаем $2a + b$ единиц, $2a + b$ десятков и $2a + b$ сотен. Поэтому $(2a + b)(100 + 10 + 1) = 2775$. Следовательно, $2a + b = 25$. Поэтому на доске могли быть записаны числа с суммой цифр 25, то есть 889 или 997 и, соответственно, все числа, полученные из них перестановкой цифр.

Комментарий. *Доказано, что число не может записываться тремя различными цифрами – 1 балл. Доказано, что 2a+b=25 – 5 баллов. При верном решении найден только один набор цифр (889 или 997) – 6 баллов. При верном решении упущены некоторые перестановки чисел 889 и 997– 7 баллов. Без объяснения отброшен случай, когда число записывается тремя одинаковыми цифрами – снять 1 балл. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла.*

5. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка K. В треугольниках AKB и AKC проведены биссектрисы KM и KP соответственно. Оказалось, что треугольники BMK и PMK равны. Докажите, что точка M делит AB пополам.



Решение. Прямые KM и KP перпендикулярны, как биссектрисы смежных углов. Поэтому треугольник BMK тоже прямоугольный. Но угол BKM острый, и, если бы прямым был угол KBM, выполнялось бы равенство отрезков $MK = MP$. Но один из этих отрезков катет, а другой – гипотенуза прямоугольного треугольника KMP. Значит, прямым является угол BMK, и в треугольнике ABK высота является биссектрисой, а, значит, и медианой.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов.*