8 класс

8.1. Автомобиль, двигаясь с постоянной скоростью, доехал из пункта А до пункта В за 3 часа. Чтобы сократить время обратного пути, шофер выехал из пункта В со скоростью на 25% больше, а доехав до середины пути между А и В, увеличил скорость еще на 20%. Сколько времени займет обратная дорога?

Ответ: 2 часа 12 минут. **Решение**. См. задачу 7.2.

8.2. Сколько решений имеет уравнение $(2x+y)^2 = 2017 + x^2$ в целых числах x, y?

Ответ: четыре решения. **Решение**. Поскольку 2017 – число простое, то из разложения $2017 = (3x+y)(x+y)$, следуют возможные варианты систем:

$$\begin{cases} 3x+y=2017 \\ x+y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x+y=1 \\ x+y=2017 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x+y=-2017 \\ x+y=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x+y=-1 \\ x+y=-2017 \end{cases}.$$

Решая каждую из этих систем, получаем четыре решения: (1008;–1007), (–1008;3025), (–1008;1007), (1008; –3025).

8.3. На стороне AC треугольника ABC взята точка M. Оказалось, что $AM = BM + MC$ и $\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$. Найдите $\angle BMA$.

Ответ. 60°.**Решение**. Вначале покажем, что треугольник ABC – равнобедренный. Действительно, это следует из условия $\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$ и свойства внешнего угла: $\angle BMA = \angle MBC + \angle BCA$. Из этих двух равенств имеем $\angle BCA = \angle BAC$, и значит, треугольник ABC – равнобедренный. Далее, возьмем на стороне AC точку K, симметричную точке M относительно точки O – середины AC. Тогда $AK = MC$ и поэтому из соотношения $AM = BM + MC$ следует, что точка M лежит между C и O и, значит, это соотношение дает $KM = BM$. Поскольку ΔABC – равнобедренный, точка O совпадает с проекцией точки B на основание AC, и поэтому $BM = BK$. Таким образом, в треугольнике KBM все стороны равны, значит, он равносторонний и все его углы равны по 60°.

8.4. Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, …, 25. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

Ответ: не могло. **Решение.** Предположим, от противного, что расставить числа можно, и рассмотрим три самых больших простых числа, меньших 25, а именно 17, 19 и 23. Пусть n – любое из этих трех чисел. Поскольку $n+10>25$ и $2n>25$, то соседними с n двумя числами на окружности могут быть только $n-10$ и единица. Таким образом, единица должна быть соседом сразу трех чисел, что, очевидно, невозможно

8.5. В вершинах куба расставили в некотором порядке 8 чисел: 1, 2, …, 8, а затем для каждого из 12 ребер куба подсчитали сумму двух чисел на его концах. Докажите, что среди этих сумм есть совпадающие.

Решение. См. задачу 7.5.