Муниципальный этап Российской олимпиады по математике 2017-18 учебного года
8 класс (*Время решения – 4 часа)*

1. Имеется 5 внешне одинаковых ящиков, массы которых равны 10, 11, 12, 14 и 17 кг, а также электронные весы, которые показывают точную массу взвешиваемых предметов (на весы разрешается поставить любое количество ящиков). Можно ли за 3 взвешивания определить, какой ящик сколько весит?

Ответ. Можно

Решение 1. Будем взвешивать по 2 ящика. Обратим внимание, что все попарные суммы масс различны, поэтому по результату взвешивания можно однозначно определить, какая пара масс взвешивалась (21 = 10+11, 22 = 10+12, 23 = 11+12, 24 = 10+14, 25 = 11+14, 26 = 12+14, 27 = 10 + 17, 28 = 11+17, 29 = 12+17, 31 = 14+17). Обозначим ящики буквами A, B, C, D, E.
1) взвесим (A+B), определим пару масс (m_1, m_2)
2) взвесим (C+D), определим пару масс (m_3, m_4)
По результатам двух взвешиваний мы знаем 4 массы, принимавших участие во взвешиваниях. Оставшаяся пятая масса – это масса ящика E.
3) взвесим (A+C), определим пару масс. Одна из них входит в пару (m_1, m_2) – это масса A, вторая входит в пару (m_3, m_4) – это масса C. Массы B и D – оставшиеся числа из пар (m_1, m_2) и (m_3, m_4) соответственно.

Решение 2. Аналогично решению 1 доказываем, что по результату взвешивания двух ящиков можно однозначно определить, какая пара масс взвешивалась. Обозначим ящики буквами A, B, C, D, E.
1) взвесим (A+B), определим пару масс (m_1, m_2)
2) взвесим (B+C), определим пару масс (m_3, m_4)
Поскольку в оба взвешивания входит предмет B, какая-то масса входит в обе полученные пары – это масса ящика B. Оставшееся число из пары (m_1, m_2) – это масса ящика A, а из пары (m_3, m_4) – масса ящика C. Таким образом, мы определили массы трех ящиков.
3) взвесим D, определим его массу. Мы определили массы четырех ящиков, оставшаяся «свободной» пятая масса – масса E.

Замечание. Возможны другие алгоритмы взвешиваний.

Комментарий. Указана только последовательность взвешиваний, но нет объяснений, как по результатам определить массу каждого ящика: если последовательность правильная (действительно позволяет определить массу каждого ящика) – 2 балла, если не позволяет, либо взвешиваний больше 3 – 0 баллов.

Замечено, что по результату взвешивания двух (трех) ящиков можно однозначно определить, какая пара (тройка) масс взвешивалась – 2 балла (складываются с баллами по предыдущему критерию).

2. Алёша и Витя отправляются из пункта N в пункт M, расстояние между которыми равно 20 км. К сожалению, на двоих у них есть только один велосипед. Из N Алеша выезжает на велосипеде, а Витя выходит пешком. Алёша может оставить велосипед в любой точке дороги, продолжив путь пешком. Когда Витя дойдет до этой точки, он пересаживается на велосипед. Скорость Алёши пешком – 4 км/ч, на велосипеде – 15 км/ч. Скорость Вити пешком – 5 км/ч, на велосипеде – 20 км/ч. В какой точке Алёша должен оставить велосипед, чтобы в M они с Витей прибыли одновременно?

Ответ. В 12 км от пункта N.

Решение. Обозначим за x (км) расстояние от N до точки, где Алёша оставляет велосипед. Тогда на весь путь Алёша затратит $\frac{x}{15}+\frac{20-x}{4}$ часов, а Витя – $\frac{x}{5}+\frac{20-x}{20}$ часов. Составляя и решая уравнение, находим $x=12$ (км).

Комментарий. Только ответ – 1 балл. Уравнение для нахождения расстояния составлено правильно, но не решено – 3 балла. При решении уравнения допущена арифметическая ошибка, остальное верно – 5 баллов.

3. В правильном треугольнике ABC проведена высота BH. На прямой BH отмечена точка D так, что BD = AB. Найдите $\angle CAD$.

Ответ. 15^0 или 75^0.

Решение. Очевидно, $\Delta ADH=\Delta CDH$ (прямоугольные, по двум катетам), следовательно AD = CD. Следовательно, $\Delta BDA = \Delta BDC$ (по трем сторонам) $\Rightarrow \angle DAB = \angle DCB$, $\angle BDA = \angle BDC$.
Кроме того, ΔABD – равнобедренный (BD = AB) $\Rightarrow \angle BDA = \angle BAD$, то есть
$\angle BDC = \angle BDA = \angle BAD = \angle DCB = \alpha$.
Рассмотрим ΔADC и сумму углов в нём.
Далее нужно рассмотреть два случая расположения точки D: по одну сторону с точкой B относительно AC и по разные стороны. В первом случае
$\angle CDA + \angle DAC + \angle DCA = \angle CDB + \angle BDA + \angle DAB + \angle BAC + \angle DCB + \angle CBA =$
$= \alpha + \alpha + \alpha + 60^0 + \alpha + 60^0 = 4\cdot\alpha + 120^0 = 180^0$ (сумма углов в треугольнике), откуда $\alpha = 60^0/4 = 15^0$. $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 60^0 + \alpha = 75^0$.
Во втором случае
$\angle CDA + \angle DAC + \angle DCA = \angle CDB + \angle BDA + \angle DAB - \angle BAC + \angle DCB - \angle CBA =$
$= \alpha + \alpha + \alpha - 60^0 + \alpha - 60^0 = 4\cdot\alpha - 120^0 = 180^0$ (сумма углов в треугольнике), откуда $\alpha = 300^0/4 = 75^0$. $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = \alpha - 60^0 = 15^0$.

Комментарий. Только ответ – 0 баллов. Рассмотрен только один случай расположения точки D (соответственно, получено только одно значение) – 4 балла.

4. В квадратной таблице 100x100 в каждой клетке записано число «1» или «–1». Известно, что во всей таблице чисел «1» не меньше двух, и чисел «–1» тоже не меньше двух. Докажите, что в этой таблице можно выбрать две строки и два столбца так, что сумма четырех чисел, на пересечении выбранных строк и столбцов будет равна 0.

Доказательство. Обозначим элементы таблицы $m_{i,j}$, $i = 1..100$, $j = 1..100$. Рассмотрим 3 ситуации.
I. В каждой строке не более одной «1». По условию «1» хотя бы две, пусть это $m_{a1,b1} = m_{a2,b2} = 1$, $a1 \neq a2$. Тогда набор строк ($a1$, $a2$) и столбцов ($b1$, $b2$) – искомый (в случае $b1=b2$ можно взять любой другой столбец), т.к. $m_{a1,b2} = -1$ (в строке $a1$ только $m_{a1,b1}=1$) и $m_{a2,b1} = -1$ (в строке $a2$ только $m_{a2,b2} = 1$).
II. В каждом столбце не более одной «–1». Данный случай рассматривается абсолютно аналогично предыдущему.
III. Остальные ситуации соответствуют условию, когда существует строка, в которой хотя бы два элемента равны 1 (пусть эта строка имеет номер a и $m_{a,b1} = m_{a,b2} = 1$), а также столбец, в котором хотя бы два элемента равны –1 (пусть это столбец d и $m_{c1,d} = -1$ и $m_{c2,d} = -1$).
Теперь рассмотрим элементы $m_{c1,b1}$, $m_{c1,b2}$, $m_{c2,b1}$, $m_{c2,b2}$. Если из них 3 или 4 равны «–1», то в одной из строк (допустим, $c1$) оба элемента равны «–1» и тогда набор строк (a, $c1$) и столбцов ($b1$, $b2$) – искомый. Если же из них 3 или 4 равны «1», то в одном из столбцов (допустим, $b1$) оба элемента равны «1» и тогда набор строк ($c1$, $c2$) и столбцов ($b1$, d) – искомый.
Таким образом, либо искомые строки и столбцы найдены, либо из четверки $m_{c1,b1}$, $m_{c1,b2}$, $m_{c2,b1}$, $m_{c2,b2}$ ровно 2 числа равны «1» и ровно 2 равны «–1» и тогда набор строк ($c1$, $c2$) и столбцов ($b1$, $b2$) – искомый.
Таким образом, во всех возможных случаях искомые строки и столбцы найдены.

Комментарий. Рассмотрены только случаи I и II (либо один из них), либо доказано аналогичное утверждение (если в каждой строке (столбце) не более одной «1» («–1»), то искомый набор строк и столбцов существует) – 3 балла. Рассмотрен только случай III – 4 балла. В других решениях возможен перебор другого множества случаев, в таких решениях нужно проверять, все ли случаи рассмотрены. Неполный перебор – не более 4 баллов. Рассмотрение одной или нескольких конкретных расстановок чисел в таблице – 0 баллов.

5. На столе лежит 7 чистых листов бумаги. Каждую минуту Вася выбирает любые 4 из них и на каждом из выбранных листов рисует по одной звезде. Вася хочет, чтобы в итоге на всех листах оказалось нарисовано различное число звёзд (то есть не было двух листов с одинаковым количеством нарисованных на них звезд). Какое наименьшее число звёзд в сумме для этого ему придется нарисовать?

Ответ. 28

Решение. Оценка. Докажем, что для достижения желаемого результата число ходов должно быть не менее 7. Если сделано 5 или менее ходов, то на каждом листе не более 5 звёзд, то есть имеется всего 6 различных вариантов числа звёзд (от 0 до 5), а листов 7. По принципу Дирихле найдутся хотя бы два листа с одинаковым числом звёзд, что противоречит условию. Пусть сделано 6 ходов, тогда максимальное число звёзд на одном листе равно 6. Но тогда различное число звёзд на всех листах достигается единственным набором значений: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, что в сумме даёт 21 звезду, а по предположению их нарисовано $6 \cdot 4 = 24$. Таким образом, ходов действительно должно быть не менее 7.
Пример. Покажем, что 7 ходов достаточно.
Первые 4 хода выбираем листы №1, №2, №3, №4.
Пятый ход: листы №1, №2, №3, №5.
Шестой ход: листы №1, №2, №5, №6.
Седьмой ход: листы №1, №5, №6, №7.
Итого на листе №1 нарисовано 7 звёзд, на листе №2 – 6 звёзд, на листе №3 – 5 звёзд и так далее, до листа №7, на котором будет нарисована 1 звезда.

Комментарий. Доказано, что 5 и менее ходов не достаточно – 2 балла. Доказано, что 6 ходов не достаточно – 2 балла. Приведён пример, как нарисовать 28 звёзд (достаточно описать каждый из 7 ходов) – 3 балла. Баллы по перечисленным критериям складываются. Только ответ – 1 балл.