МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2017-2018 уч. год
8 класс
(4 часа)

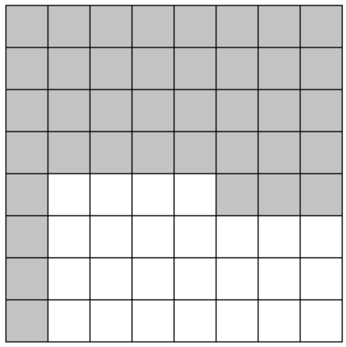
1. Натуральное число *n* называется «хорошим», если после приписывания его справа к любому натуральному числу получается число, делящееся на *n*. Запишите 13 хороших чисел, которые меньше 2017.
Ответ: любые 13 чисел из набора из 15 чисел: 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000, 1250, 2000.
Решение. Приписывание числа справа равносильно умножению на 10 в соответствующей степени *p* (количество цифр в числе *n*). Так как исходное число может быть любым, то число *n* будет «хорошим» тогда и только тогда, когда 10^p будет кратно *n*. Поэтому надо искать *n* в виде произведения множителей 2 и 5.
Замечание. Не любое произведение из множителей 2 и 5 будет «хорошим». Например, числа 4 и 625 «хорошими» не являются.
Критерии.
Если неверное решение или решение, не удовлетворяющее критериям – 0 баллов.
Если записано 11 верных ответов – 1 балл.
Если кроме 13 верных ответов есть два неверных – 1 балл.
Если записано 12 верных ответов – 3 балла.
Если кроме 13 верных ответов есть один неверный – 3 балла.
Если решено верно – 7 баллов.

2. Андрей, Борис, Василий, Геннадий и Дмитрий играли в настольный теннис парами так, что каждые двое сыграли с каждой другой парой ровно один раз. Ничьих в теннисе не бывает. Известно, что Андрей проиграл ровно 12 раз, а Борис ровно 6 раз. Сколько раз выиграл Геннадий?
Ответ: Геннадий выиграл 8 раз.
Решение. Первую пару можно составить 5×4:2=10 способами, вторую пару можно составить 3×2:2=3 способами. Всего игр получаем 10×3:2=15. Андрей всего играл в 4 парах, а они играли с 3 парами. Значит, всего Андрей играл 4×3=12 раз. По условию, он проиграл 12 раз, следовательно, он проиграл все свои игры. Вместе с ним в паре 3 раза проиграл Борис. Поскольку Борис выиграл у Андрея 6 раз, когда играл в паре с Василием (2 раза), с Геннадием, с Дмитрием, то остальные он партии проиграл, то есть 3 с Андреем и по одной с Василием (против Геннадия и Дмитрия), с Геннадием и с Дмитрием. Значит, Геннадий проиграл с Андреем 3 раза и с Борисом 1 раз, всего 4 раза. Поэтому выиграл он 8 раз.
Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
Если верное решение – 7 баллов.

3. Какое наибольшее число пешек можно поставить на шахматную доску (не более одной пешки на каждое поле), если: 1) на поле $e4$ пешку ставить нельзя; 2) никакие две пешки не могут стоять на полях, симметричных, относительно поля $e4$?

<u>Ответ:</u> 39 пешек.

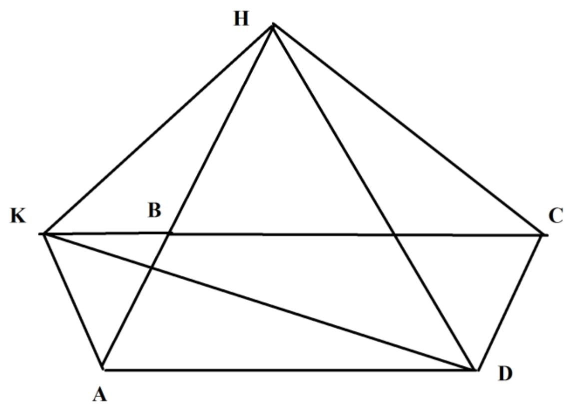
<u>Решение.</u> Все поля доски кроме вертикали a, горизонтали 8 и самого поля $e4$ можно разбить на пары, симметричные относительно $e4$. Таких пар образуется 24. По условию, на поля каждой пары можно поставить не более одной пешки. Кроме того, можно поставить не более чем по одной пешке на поля вертикали a и горизонтали 8. Таких полей 15. На поле $e4$, по условию, пешки ставить нельзя. Значит, всего можно поставить не более 39 пешек. Пример расстановки 39 пешек показан на рис. (поля для пешек закрашены).



Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если только верный пример – 3 балла.
Если только верная оценка – 3 балла.
Если верное решение (любой правильный пример и обоснование оценки) – 7 баллов.

4. Дан параллелограмм ABCD. На прямых AB и BC выбраны точки H и K так, что ΔKAB и ΔHCB – равнобедренные (KA=AB, HC=CB). Докажите, что ΔKDH – равнобедренный.

<u>Решение.</u>



Первый случай. Угол B – острый.
Пусть $\angle KBA=\alpha$, тогда $\angle HBC=\alpha$ (как вертикальные). Из равнобедренных треугольников получаем, что $\angle BKA=\angle BHC=\alpha$. Тогда по сумме углов треугольника получаем, что $\angle KAB=\angle HCB=180°-2\alpha$.
По свойству параллелограмма получаем, что $\angle BAD=\angle BCD=\beta$.
Следовательно,
$\angle KAD=\angle DCH=\beta+(180°-2\alpha)$.
Из равнобедренных треугольников и свойств параллелограмма получаем $KA=BA=CD$, $AD=BC=CH$. Тогда треугольники ΔKAD и ΔDCH равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $KD=HD$ и треугольник ΔKDH – равнобедренный.
Второй случай. Угол B – тупой (прямым он быть не может, так как тогда не будет треугольников ΔKAB и ΔHCB).
Рассуждения аналогичны, кроме шага: $\angle KAD=\angle DCH=\beta-(180°-2\alpha)$.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если верный ход рассуждений и есть вычислительная ошибка – 3 балла.
Если верно рассмотрен только один случай и про второй не упоминается – 5 баллов.
Если верное решение с рассмотрением обоих случаев – 7 баллов.

5. Боря и Вова играют в следующую игру на изначально белой доске 8×8. Боря ходит первым и каждым своим ходом закрашивает в чёрный цвет любые четыре белые клетки. После каждого его хода Вова закрашивает полностью в белый цвет какой-нибудь ряд (строку или столбец). Боря стремится закрасить как можно больше клеток, а Вова стремится ему помешать. Какое наибольшее количество чёрных клеток может оказаться на доске после хода Бори, как бы не играл Вова?

Ответ: 25 клеток.

Решение. Пусть Вова каждым своим ходом делает белым ряд с наибольшим количеством чёрных клеток. Тогда, как только Боря добьётся ряда из не менее чем четырёх чёрных клеток (такой ряд будем называть «богатым»), Вова будет удалять минимум четыре клетки, значит, следующим ходом Боря не сможет увеличить количество чёрных клеток в сравнении со своим предыдущим ходом. И далее при наличии богатых рядов Вова удаляет минимум 4 чёрных клетки, а Боря после этого добавляет четыре, значит, увеличить свой максимальный результат не сможет. При этом перед первым и всеми последующими моментами создания богатого ряда при их отсутствии на доске была максимум 7·3=21 чёрная клетка − семь рядов по 3 чёрных клетки, т.к. только что Вова сделал белым ряд этого направления. Таким образом, Боря всегда создаёт конструкцию с максимум 25 чёрными клетками. Покажем теперь, что Боря всегда может добиться 25-ти чёрных клеток. Выделим на доске 24 клетки так, как показано на рисунке, − по три в каждом вертикальном и горизонтальном ряду. Пусть Боря закрашивает всегда только клетки этого множества, пока среди них есть белые клетки. Тогда Вова очередным ходом сможет удалить максимум три чёрные клетки, значит, количество чёрных клеток после каждой пары их ходов будет увеличиваться хотя бы на 1. Значит, в некоторый момент Боря сможет сделать чёрными все эти клетки (и ещё, возможно, какие-то). Тогда после хода Вовы останется не менее 21-ой чёрной клетки, а Боря своим следующим ходом добьётся минимум 25-ти чёрных клеток. Значит, при правильной игре обоих максимальное количество чёрных клеток на доске, появление которого может обеспечить Боря, равно 25.

x	x	x					
	x	x	x				
		x	x	x			
			x	x	x		
				x	x	x	
					x	x	x
x						x	x
x	x						x

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Если только верный пример – 3 балла.
Если только верная оценка – 3 балла.
Если верное решение (любой правильный пример и обоснование оценки) – 7 баллов.