Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий, т.е. к д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину (адрес эл. почты **valerii.shevaldin@imm.uran.ru**) и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**). Мы ответим на все Ваши вопросы.

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2017 – 2018 учебном году 8 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

8.1. *В классе больше 20, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в шахматный кружок в 2 раза меньше, чем тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в шашечный кружок, в 3 раза меньше, чем тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение: Пусть в шахматный кружок ходит n учащихся класса, тогда в него не ходят $2n$ учеников, а всего в классе $3n$ учеников, то есть общее число учеников класса делится на 3. Аналогично, из того, что в шашечный кружок ходит втрое меньше людей, чем не ходят, получаем, что общее число учеников класса делится на 4. Числа 3 и 4 взаимно просты, поэтому общее число учеников класса должно делиться и на 12 тоже. В промежутке от 20 до 30 такое число одно: 24. Легко строится пример, показывающий, что 24 ученика класс содержать может: при этом 8 человек ходят в кружок шахмат, а 6 — в кружок шашек.

Ответ: 24 ученика.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ (пример, что 24 ученика в классе могут быть, приводить НЕ ТРЕБУЕТСЯ)	7 баллов
Доказано, что общее число учеников класса делится и на число 3, и на число 4	5 баллов
Доказано, что общее число учеников класса делится на одно из чисел 3 или 4 при отсутствии дальнейших продвижений	3 балла
Приведён верный ответ, подкреплённый примером и не доказана его единственность	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

8.2. *Существуют ли действительные числа x, y, z такие, что*

$$\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{1}{y^2-z^2}+\frac{1}{z^2-x^2}=0?$$

Ответ обоснуйте.

Решение:

Способ 1. Пусть $a = x^2 - y^2$, $b = y^2 - z^2$. Тогда $z^2 - x^2 = -(a+b)$ и равенство получает вид $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a+b}$, откуда $(a+b)^2 = ab$, и $\left(a + \dfrac{1}{2}b\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4} = 0$, что невозможно, так как $b \neq 0$.

Способ 2. Модули чисел x, y и z попарно различны, так как в противном случае знаменатель какой-то дроби обратится в 0. При этом ограничении проведём равносильные преобразования.

$$\frac{1}{x^2-y^2} + \frac{1}{y^2-z^2} + \frac{1}{z^2-x^2} = 0,$$

$$(z^2-x^2)\cdot(y^2-z^2) + (x^2-y^2)\cdot(z^2-x^2) + (x^2-y^2)\cdot(z^2-x^2) = 0,$$

$$z^2x^2 + y^2z^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4 - z^4 = 0,$$

$$2x^4 + 2y^4 + 2z^4 - 2z^2x^2 - 2y^2z^2 - 2x^2y^2 = 0,$$

$$(x^2-y^2)^2 + (y^2-z^2)^2 + (z^2-x^2)^2 = 0,$$

$$x^2 - y^2 = y^2 - z^2 = z^2 - x^2 = 0,$$

$$|x| = |y| = |z|.$$

Противоречие.

Ответ: Таких чисел не существует.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство отсутствия таких чисел	7 баллов
Идея (не реализованная) рассмотреть уравнение, как уравнение от одной переменной (с одним или двумя параметрами)	3 балла
Уравнение верно сведено к уравнению с двумя переменными	2 балла
Ответ без обоснования (возможно, подкреплённый примерами) и/или неверный ответ, а также всевозможные выкладки, из которых не видно хода решения	0 баллов

8.3. *На острове рыцарей и лжецов каждого жителя спросили про каждого из остальных: лжец тот или рыцарь. Всего было получено:* 42 *ответа «рыцарь» и* 48 *ответов «лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть на острове? Ответ обоснуйте. (Известно, что рыцари всегда говорят только правду, а лжецы — только неправду.)*

Решение: Каждый из n жителей дал $n-1$ ответ; всего было дано $n(n-1)$ ответов, что по условию равно $42 + 48 = 90$. Отсюда $n = 10$, то есть на острове всего 10 жителей. Пусть рыцарей x, тогда лжецов $10 - x$. Ответы «лжец» возникают в двух случаях: когда рыцарь говорит про лжеца (таких вариантов $x(10-x)$) и наоборот (вариантов столько же). Имеем уравнение $2x(10-x)=48$, откуда $x=6$ или $x=4$. Оба варианта возможны.

Примечание: Вместо уравнения $2x(10-x)=48$ может возникнуть уравнение $x(x-1)+(10-x)(9-x)=42$ (по числу ответов «рыцарь») или даже уравнение типа $\dfrac{2x(10-x)}{x(x-1)+(10-x)(9-x)}=\dfrac{48}{42}$. Все они равноправны.

Ответ: 6 рыцарей.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за ошибок в вычислениях	6 баллов
Получено верное уравнение (система уравнений), полностью описывающее условие задачи; это уравнение (система) не решено	4 балла
Верно найдено количество жителей острова (при отсутствии дальнейших продвижений)	3 балла
Показано, что количество рыцарей могло равняться 4 или 6 (хотя бы одному из этих чисел) и не доказано, что других вариантов нет	1 балл
Ответ без обоснования	0 баллов

8.4. *Существует ли девятизначное натуральное число без нулевых цифр, остатки от деления которого на каждую из его цифр (первую, вторую, ..., девятую) будут попарно различны? Ответ обоснуйте.*

Решение: По условию в таком числе (если оно существует) все цифры, кроме нуля, встречаются по одному разу. Значит, сумма всех цифр равна 45. По признакам делимости на 3 и на 9 число делится и на 3, и на 9. Но это значит, что остатки от деления числа на эти цифры раны 0, и, следовательно, совпадают.

Ответ: Не существует.

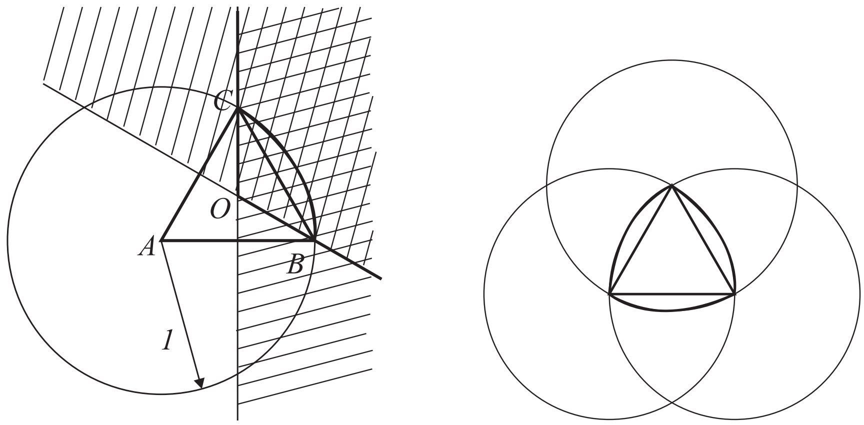
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
В предположении существования такого числа верно определены какие-то его свойства при этом решения нет	2 балла
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов

8.5. *Пусть ABC — равносторонний треугольник со стороной 1 см. Найдите все точки плоскости, для каждой из которых наибольшее из расстояний до вершин этого треугольника равно 1 см. Ответ обоснуйте.*

Решение:

<u>Способ 1.</u> Множество точек плоскости, расстояние от каждой из которых до вершины A больше расстояния до вершины B, есть полуплоскость с границей, проходящей через вершину C треугольника ABC и его медиану — см. рисунок слева. Аналогично отметим вторую полуплоскость — множество точек P таких, что $AP > AC$. Пересечение этих плоскостей (угол $\angle BOC$) — есть геометрическое место точек плоскости P, для которых максимальное из расстояний до вершин треугольника реализуется отрезком PA. На этом множестве нас интересует часть окружности с центром в точке A радиуса 1. Получаем дугу в $120°$. Аналогично строятся две другие дуги.



К решению задачи 8.5.

<u>Способ 2.</u> Пусть наибольшее из трёх расстояний от некоторой искомой точки P реализуется отрезком PA. Тогда $PA = 1$, $PB \leqslant 1$, $PC \leqslant 1$, то есть точка P лежит на окружности с центром в точке A радиуса $1 = AB = AC$, но внутри каждого из кругов того же радиуса с центрами в точках B и C. Получаем дугу окружности градусной меры $60°$. Ещё две такие же дуги получаются в случаях, когда наибольшее из расстояний реализуется отрезками PB и PC — см. рисунок справа.

Ответ: объединение трёх дуг, выделенных на правом чертеже жирно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Приведены все три дуги, составляющие верный ответ, показано, что все их точки удовлетворяют условию, но не доказано, что других таких точек нет	5 баллов
Верно найдена одна (или две) из трёх дуг, составляющих ответ (доказано, что её точки подходят)	4 балла
Приведены только три окружности радиуса 1 с центрами в вершинах треугольника или верно указано множество точек плоскости P, для которых $PA \geqslant PB$ и $PA \geqslant PC$ (угол BOC, где O — центр треугольника)	2 балла
Верный ответ без обоснования	1 балл

8.6. *Можно ли разрезать прямоугольный брусок размером* $3 \times 4 \times 5$

а) на 10 *прямоугольных брусков попарно различного объема и с целочисленными ребрами;*

б) на 11 *прямоугольных брусков попарно различного объема и с целочисленными ребрами?*

Ответ обоснуйте.

Решение: Минимальные 11 различных объёмов брусков — это натуральные числа от 1 до 11. Их сумма равна 66, что больше объёма разрезаемого бруска. Поэтому на 11 брусков разного целочисленного объёма разрезать исходный брусок невозможно и ответ на пункт б) отрицательный.

Минимальные 10 различных объёмов брусков — это натуральные числа от 1 до 10, но брусок объёма 7 имеет размеры $1 \times 1 \times 7$ и получен быть не может. Это же касается бруска объёма 11. Значит, 10 допустимых минимальных объёмов — это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 и 12, их сумма в точности равна $60 = 3 \times 4 \times 5$. Покажем, как разрезать искомый брусок на бруски заданных объёмов. Например, можно сначала разрезать брусок «послойно», на три параллелепипеда размера $1 \times 4 \times 5$, а затем разрезать каждый слой так, как показано на рисунке.

12	12	12	4	3
12	12	12	4	3
12	12	12	4	3
12	12	12	4	1

5	5	5	5	5
9	9	9	6	6
9	9	9	6	6
9	9	9	6	6

10	10	10	10	10
10	10	10	10	10
8	8	8	8	2
8	8	8	8	2

К решению задачи 8.6

Ответ: а) можно; б) нельзя.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное решение обоих пунктов а) и б)	7 баллов
Доказано, что на 11 брусков разрезать нельзя, и верно найдены объёмы 10 брусков, на которые следует разрезать в пункте а); примера разрезания на 10 брусков нет	5 баллов
Доказано, что на 11 брусков разрезать нельзя; продвижений в решении пункта а) нет	4 балла
Приведён верный пример разрезания на 10 брусков, но пункт б) не решён	3 балла
Верно определены объёмы 10 брусков, на которые следует разрезать в пункте а); других продвижений нет	2 балла
Верный ответ без обоснования или неверный ответ	0 баллов