

8 класс

Составитель всех задач Женодаров Р.Г.

1. Можно ли число 2017 представить в виде суммы четырёх слагаемых, в десятичной записи каждого из которых используется только одна цифра, и в записи которых различное число цифр?

Решение. Искомое представление: $2017=1111+888+11+7$.

Критерии. Любое верное представление: 7 баллов.

2. В круг встали семнадцать аборигенов – представителей нескольких племён. Они говорят правду соплеменникам и лгут представителям других племён. Могло ли случиться так, что каждый из них сказал соседу справа: "Мой сосед слева - из другого племени"?

Ответ: не могло.

Решение. У каждого аборигена ровно один из его соседей – его соплеменник. Если оба соседа – соплеменники, он должен говорить правду, а он лжёт. Если оба соседа из других племён, он должен лгать, а он говорит правду. Значит, все аборигены должны разбиваться на пары соседей соплеменников. Но для 17 аборигенов это невозможно, поскольку 17 - нечётное число.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.

3. Даны три числа. Если каждое из них увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. Если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. Найти эти числа.

Ответ: $-1, -1, -1$.

Решение.

Пусть искомые числа a, b, c . Тогда $(a+1)(b+1)(c+1)=abc+1$ (1) и $(a+2)(b+2)(c+2)=abc+2$ (2). После раскрытия скобок и упрощений получим $a+b+c+ab+ac+bc=0$ (3) и $4(a+b+c)+2(ab+bc+ac)+6=0$ (4). Значит, $a+b+c=-3$ (5), $ab+bc+ac=3$ (6). Возведя (5) в квадрат и учитывая (6), получим $a^2+b^2+c^2=3$ (7). Из (6) и (7) следует $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$ (8). Это равносильно следующему равенству $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ (9). Отсюда имеем, что $a=b=c$.

Учитывая (5), получаем $a=b=c=-1$.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.

Получено равенство (8), но не заменено (9): 3 балла.

Получено равенство (5) или (6): 2 балла.

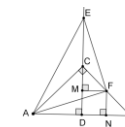
Записаны равенства (1) и (2): 1 балл.

Только ответ: 0 баллов.

4. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC ($AC=BC$) точки D и F – середины отрезков AB и BC соответственно. На луче DC отметили точку E такую, что $AF=FE$. Найти углы треугольника AFE.

Ответ: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Решение. Треугольник CDB – прямоугольный равнобедренный. (CD – медиана и высота прямоугольного равнобедренного треугольника ACB и, значит, $CD=DB$). Опустим



перпендикуляры из F на CD и DB. Их основаниями служат середины отрезков CD и DB (обозначим их M и N соответственно). DMFN – квадрат. Треугольники ANF и EMF равны по гипотенузе и катету. Значит $\angle AFN = \angle EFM$. Далее $\angle AFE = \angle EFM + \angle MFA = \angle AFN + \angle MFA = 90^\circ$. Треугольник AFE – прямоугольный и равнобедренный, его углы: $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.

Только ответ: 0 баллов.

5. В турнире играют 15 волейбольных команд, каждая команда играет со всеми остальными командами только один раз. Поскольку в волейболе нет ничьих, в каждом матче есть победитель. Команда считается выступившей хорошо, если она проиграла не более двух матчей. Найти наибольшее возможное число команд, выступивших хорошо.

Ответ: 5.

Решение.

Оценка. Если команд, сыгравших хорошо, не менее 6, то рассмотрим шесть из них. Они могли проиграть не более $6 \times 2 = 12$ матчей. Но игр между собой они совершили $6 \times 5 / 2 = 15$. И, значит, суммарно проиграли не менее 15 матчей. Противоречие.

Пример. Поставим капитанов 5 команд по кругу лицом к центру. Пусть каждая команда проиграла двум командам, капитаны которых справа от их капитана по кругу, а у двух команд, капитаны которых слева – выиграла, и ещё выиграла у остальных 10 команд. Игры 10 команд между собой могут закончиться как угодно. Пять команд, капитаны которых стоят в круге, выступили хорошо. Остальные проиграли не менее пяти матчей.

Критерии. Любое верное решение: 7 баллов.

Сделана оценка, что 6 и более команд хорошими быть не могут: 4 балла.

Приведён пример для 5 хороших команд: 2 балла.

Только ответ: 0 баллов.

Критерии проверки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.