Математика, 8 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При проверке работ следует руководствоваться следующими важными принципами:

1. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.

2. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты.

3. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.

4. Недопустимо выставлять баллы «за старание участника», в том числе за запись в работе сколь угодно большого по объему текста, не содержащего полезных продвижений в решении задачи.

5. При проверке результата выполнения каждого задания в работе участника олимпиады более высоким приоритетом обладают критерии оценки конкретного задания, приведенные в материалах для жюри.

6. Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Решения и указания по проверке

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы), за отличие от приведенных ниже возможных вариантов рассуждений. ***При этом оценка «7 баллов» ставится за любое верное (!) решение.***

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

1. От дома Винтика и Шпунтика до школы 6 километров. Винтик и Шпунтик одновременно выехали в школу, причем Винтик половину затраченного времени ехал на самокате со скоростью 10 км/ч и потом шел пешком, а Шпунтик половину расстояния ехал на велосипеде и потом шел пешком. Прибыли в школу они одновременно. Пешком они оба ходят со скоростью 5 км/ч. С какой скоростью Шпунтик ездит на велосипеде?

Ответ: 15 км/ч.

Решение:

Первый способ.
Так как Винтик едет в два раза быстрее, чем идет, то и проехал он в два раза больше, чем прошел (потому что тратил на это одинаковое время), то есть 4 км. Так как Винтик и Шпунтик ходят с одной скоростью, то последние 2 км они прошли вместе. Стало быть, пока Винтик ехал на самокате 4 км, Шпунтик проехал на велосипеде 3 км, а потом еще прошел пешком 1 км. Так как Винтик едет на самокате в два раза быстрее, чем ходит, то пока Шпунтик шел 1 км, Винтик проехал 2 км. А следовательно, пока Винтик ехал первые 2 км на самокате, Шпунтик на своем велосипеде преодолел 3 км, поэтому ездит на велосипеде в полтора раза быстрее, чем Винтик на самокате, – то есть со скоростью 15 км/ч.
Второй способ.
Как и в первом способе, получаем, что Винтик проехал на самокате 4 км и прошел пешком 2 км – на это он потратил 4/10 + 2/5 = 4/5 (ч). Пусть скорость Шпунтика на велосипеде x км/ч. Он проехал 3 км на велосипеде, потратив на это $3/x$ (ч), а потом прошел 3 км и потратил на это 3/5 (ч). Винтик и Шпунтик потратили на дорогу одинаковое время, поэтому $3/x + 3/5 = 4/5$, откуда $3/x = 1/5$, а тогда $x = 15$.

Критерии:
Верный ответ без верного обоснования – 2 балла.
Правильно составленное уравнение (для потраченного Винтиком и Шпунтиком времени) – еще 2 балла.

2. В тетради выписаны все несократимые дроби с числителем 15, но которые больше $\frac{1}{16}$ и меньше $\frac{1}{15}$. Сколько всего таких дробей выписано в тетради?

Ответ: 9 дробей.

Решение:

Ищем все подходящие несократимые дроби вида $\frac{15}{n}$. Так как $\frac{1}{16} < \frac{15}{n} < \frac{1}{15}$, то $15 \cdot 15 < n < 15 \cdot 16$ или $225 < n < 240$ (при этом дробь $\frac{15}{n}$ несократима, то есть n не делится ни на 3, ни на 5). Несложно убедиться, что из этого диапазона (из 14 чисел) нужно исключить числа 228, 230, 231, 234, 235, 237 – 5 чисел. Остается 9 возможных значений n.

<u>Критерии:</u>
Верный ответ без верного обоснования – 1 балл.
Вполне возможно, участники будут пытаться выписать все такие дроби, а потом обосновывать, почему знаменатель не может быть больше или меньше, – внимательно следить за аккуратностью таких обоснований.

3. В каждую клетку таблицы 2×2 записали по одному числу, причем все числа разные. Оказалось, что сумма чисел в первой строке равна сумме чисел во второй строке, а произведение чисел в первом столбце равно произведению чисел во втором столбце. Чему может быть равна сумма всех четырех чисел в таблице? Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему нет других.

<u>Ответ:</u> 0.

Решение:

a	b
c	d

Обозначим числа в таблице, как показано слева. По условию, $a+b=c+d$, $ac=bd$. Тогда $a=c+d-b$, подставляем в равенство произведений: $(c+d-b)c=bd$. Раскрываем скобки, все переносим влево: $c^2+cd-bc-bd=0$. Раскладываем на множители: $(c+d)(c-b)=0$. Так как $c-b\neq 0$ (все числа разные), то $c+d=0$. Но тогда и в первой строке сумма тоже равна 0, и, соответственно, во всей таблице тоже.

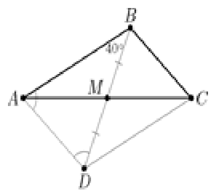
<u>Критерии:</u>
Верный ответ без верного обоснования – 1 балл.
Если не обосновано, почему на $c-b$ можно сократить – снимать 2 балла.

4. В треугольнике *ABC* провели медиану *BM*. Оказалось, что *AB* = 2*BM* и $\angle MBA$ = 40°. Найдите $\angle CBA$.

<u>Ответ:</u> 110°.

Решение:

Продлим медиану *BM* за точку *M* на ее длину и получим точку *D*. Так как *AB* = 2*BM*, то *AB* = *BD*, то есть треугольник *ABD* – равнобедренный. Следовательно, углы *BAD* и *BDA* равны по (180° – 40°) : 2 = 70° каждый. *ABCD* – параллелограмм, так как его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, угол *CBD*, как и *ADB*, равен 70°, а угол *ABC*, равный сумме *CBD* и *ABD*, составляет 110°.



<u>Критерии:</u>
Верный ответ без верного обоснования – 1 балл.
Идея достраивания треугольника до параллелограмма без дальнейшего содержательного продвижения — 2 балла (не суммируется баллом за верный ответ).

5. Организаторы математической олимпиады решили сфотографировать 60 участников. Известно, что ни на одном снимке не помещается более 30 участников, однако любые два школьника хотя бы раз оказывались сфотографированы на одном снимке. Какое наименьшее количество снимков нужно для этого сделать?

Ответ: 6.

Решение:

Пример на 6 снимков: разобьем 60 участников на 4 группы по 15 человек (группы *А, Б, В, Г*). Сделаем 6 снимков для всех возможных пар групп: $А + Б$, $А + В$, $А + Г$, $Б + В$, $Б + Г$, $В + Г$ – на каждом снимке будет по 30 человек, и легко видеть, что при этом любые два человека будут сфотографированы вместе.

Докажем, что меньшим количеством снимков не обойтись. Пусть сделано не более 5 снимков. Будем после каждого снимка давать каждому из сфотографированных по конфетке. Тогда в сумме участникам олимпиады выдали не более $30 \cdot 5 = 150$ конфет (так как на каждом снимке не более 30 человек, а снимков не более 5). Так как участников 60, то найдется участник, который получил не более 2 конфет (иначе всего выдано не менее $60 \cdot 3 = 180$ конфет). Тогда он на одном снимке не более чем с 29 другими участниками и на другом снимке (если есть такой) тоже не более чем с 29 другими участниками – то есть, не более чем с $29 \cdot 2 = 58$ другими участниками олимпиады, а должен был сфотографироваться со всеми 59 участниками (т.е. со всеми, кроме него). Противоречие, поэтому для выполнения условия задачи пяти снимков недостаточно.

Критерии:

Верный ответ без верного примера в баллах не оценивается.
Пример для 6 снимков – 2 балла.
Верная оценка (обоснование, почему 5 или меньшим количеством снимков не обойтись) – еще 5 баллов.
Пример или оценка на 7 или более снимков в баллах не оцениваются.