9 класс

1. Три свечи зажгли одновременно. Когда сгорела первая свеча, то от второй осталась $\frac{2}{5}$ ее часть, а от третьей $\frac{3}{7}$ части. Какая часть останется от третьей свечи, когда сгорит вторая?

Решение

За время t сгорело $\frac{3}{5}$ второй свечи и $\frac{4}{7}$ третьей.

Скорость сгорания второй свечи $\frac{3}{5t}$, скорость сгорания третьей $\frac{4}{7t}$.

$\frac{2}{5}$ второй свечи сгорит за время $\frac{2}{5} : \frac{3}{5t} = \frac{2t}{3}$.

За это время от третьей свечи сгорит $\frac{2t}{3} \frac{4}{7t} = \frac{8}{21}$ часть.

От третьей свечи останется $\frac{3}{7} - \frac{8}{21} = \frac{1}{21}$ часть.

Критерии

Допущена вычислительная ошибка или описка только в последнем действии верного хода решения, которая привела к неверному ответу - 5 баллов.

Вычислительные ошибки в более ранних действиях, в результате которой получен неверный ответ, при верном ходе решения - 3 балла.

2. Решите уравнение $(x^2 - |x| - 2)^2 + \sqrt{|2x+1| - 3} = 0$.

Решение

Так как каждое слагаемое исходного уравнения неотрицательно, уравнение может иметь решения тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю. Получаем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - |x| - 2 = 0, \\ |2x+1| - 3 = 0, \end{cases}$$

Решением этой системы является $x = -2$.

Критерии

Составлена и обоснована равносильная система, но решена неверно – 4 балла.

Составлена и решена равносильная система, но не обоснована - 5 баллов.

Равносильная система составлена, но не обоснована и решена с ошибкой - 3 балла**.**

3. На плоскости проведены три прямые, причем параллельными среди них могут быть не более двух прямых. Всегда ли в этой плоскости можно найти точку, равноудаленную от всех трех прямых?

Решение

Может быть два случая.

1-й - никакие две прямые не параллельны. В этом случае при пересечении прямых образуется треугольник. Искомая точка - есть центр вписанной в этот треугольник окружности.

2-й - ровно две прямые параллельны (рис.1). В этом случае перпендикуляр AB к параллельным прямым перемещаем параллельно самому себе до тех пор, пока не образуется четырехугольник, в который можно вписать окружность, т.е. у которого суммы противоположных сторон равны: $MD + 2AD = MC + AB$ (*)

Так как $MD < MC$ (наклонная больше своей проекции), то $MD < MC + AB$.

Значит, существует $AD > 0$, которое удовлетворяет равенству (*)

Длины отрезков MD, MC, AB в равенстве (*) фиксированы положением прямых.

В случае $MD = 0$ имеем $ABCD$ - квадрат.
Таким образом, всегда можно найти точку, равноудаленную от всех трех прямых.

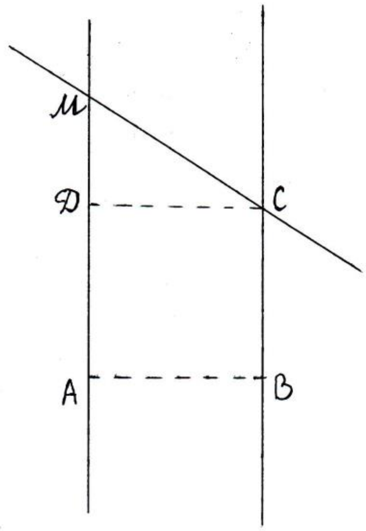

Рис. 1.

Критерии

Рассмотрен только первый случай - 1 балл.

Рассмотрен только второй случай - 4 балла. Если 2-й случай рассмотрен с неполным обоснованием, то из 4-х баллов вычитается 1 или 2 балла в зависимости от полноты обоснования.

Рассмотрены оба случая, но обоснования неполные - 5 баллов.

4. Можно ли разбить выпуклый 2017-угольник на черные и белые треугольники так, чтобы любые 2 треугольника имели либо общую сторону, когда окрашены в разные цвета, либо общую вершину, либо не имели общих точек, а каждая сторона 2017-угольника являлась бы стороной одного из черных треугольников?

Решение

Пусть n - количество белых треугольников. Значит, $3n$ сторон белых треугольников, так как из условия следует, что одноцветные треугольники не имеют общих сторон.

Тогда $3n + 2017$ сторон черных треугольников, так как любая сторона белого треугольника является в то же время стороной черного. Однако, $3n + 2017$ не делится на 3, поэтому так разбить нельзя.

Критерии

Правильный вывод, полученный из рассмотрения любых конкретных примеров, оценивается в 0 баллов.

Решение верное, но в нем не сформулирован вывод о том, что одноцветные треугольники не имеют общих сторон и любая сторона белого треугольника является в то же время стороной черного - оценивается в 5 баллов.

5. Двое по очереди стирают запись на доске: «Привет участникам олимпиады по математике!». За один ход можно стереть либо любую букву, либо восклицательный знак, либо несколько одинаковых букв. Выигрывает тот, кто делает последний ход. Как играть, чтобы выиграть?

Решение

Выигрывает второй, отвечая на ходы соперника следующим образом.
Все символы разобьем на пары:
Р↔В, У↔Ч, С↔Н, Л↔Д, Ы↔!, КК↔ОО, ППП↔ЕЕЕ, ТТТТ↔ММММ, ИИИИИ↔ААААА.
Ход соперника и ответ на него либо полностью вычеркивает одну пару, либо вычеркивает из одной пары по равному количеству одинаковых букв.

Критерии

Полное решение содержит: указание, кто выигрывает (первый или второй игрок), описание выигрышной стратегии и ее доказательство.
Доказательством стратегии является тот факт, что этой стратегии возможно следовать, и она обязательно приводит к выигрышу.
При отсутствии какого-либо компонента решения - 4 балла.