Решения задач

9 класс

1. Ванна заполняется холодной водой за 6 минут 40 секунд, горячей — за 8 минут. Кроме того, если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 13 минут 20 секунд. Сколько времени понадобится, чтобы наполнить ванну полностью, при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой?

Решение: Сначала заменим время в секундах временем в минутах: 6 минут 40 секунд заменим на 6 + 2/3, или 20/3, а 13 минут 20 секунд заменим на 13 + 1/3, или 40/3. Тогда за одну минуту холодной водой заполнится 3/20 ванны, горячей — 1/8 ванны, а вытечет 3/40 ванны. Следовательно, за одну минуту наполнится 3/20 + 1/8 – 3/40, т.е. 1/5 ванны. Значит, вся ванна наполнится за 5 минут.

2. У прямоугольника уменьшили стороны: длину – на 10%, ширину – на 20%. При этом периметр прямоугольника уменьшился на 12%. На сколько процентов уменьшится периметр прямоугольника, если его длину уменьшить на 20%, а ширину уменьшить на 10%?

Ответ: на 18%.
Решение. Обозначим через a и b длину и ширину прямоугольника. После уменьшения длины на 10%, а ширины на 20% получим прямоугольник со сторонами $0{,}9a$ и $0{,}8b$, периметр которого составляет 0,88 периметра исходного прямоугольника. Следовательно, $2(0{,}9a + 0{,}8b) = 0{,}88\cdot 2(a + b)$, откуда $a = 4b$. Если теперь длину уменьшить на 20%, а ширину на 10%, то получим прямоугольник с периметром $2(0{,}8\cdot 4b + 0{,}9b) = 8{,}2b$, что составляет $8{,}2b : 10b = 0{,}82$ или 82% от периметра исходного прямоугольника. Следовательно, периметр уменьшился во второй раз на 18%.
Замечание. Верное решение с арифметическими ошибками – 5 баллов, решение с конкретными длинами сторон – 2 балла.

3. В шестизначном числе зачеркнули одну цифру и получили пятизначное. Из исходного числа вычли это пятизначное число и получили 654321. Найдите исходное число.

Ответ. 727 023.
Решение. Заметим, что зачёркнута была последняя цифра, т.к. в противном случае после вычитания последняя цифра числа была бы нулевой. Пусть y – последняя цифра исходного числа, x – пятизначное число после зачёркивания. Тогда полученное число равно $10x + y – x = 9x + y = 654\,321$. Деля это число на 9 с остатком (и учитывая, что y не превосходит 9), получим остаток $y=3$ и частное $x=727\,02$.

4. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 так, что $C_1A_1 \parallel AC$. Докажите, что $S_{A_1B_1C_1} \le \frac{1}{4} S_{ABC}$.

Решение. Из условия $C_1A_1 \parallel AC$ следует, что треугольники BC_1A_1 и BAC подобны. Пусть $x = C_1A_1 / AC$ – коэффициент подобия. Тогда высота в треугольнике BC_1A_1, опущенная из точки B на C_1A_1, равна xh, где h – высота треугольника BCA из точки B. Значит, высота в треугольнике $B_1C_1A_1$ из точки B_1 на C_1A_1 равна $h - xh = (1-x)h$. Таким образом, $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}(x \cdot AC)\cdot(1-x)h = x(1-x)S_{\Delta ABC}$. Максимум квадратичной функции $y(x) = x(1-x)$ достигается в точке $x_0 = \frac{1}{2}$ (абсциссе вершины параболы) и равен $\frac{1}{4}$, откуда следует результат.

5. Каждая из точек плоскости покрашена в один из трех цветов, причем все три цвета используются. Верно ли, что при любой такой покраске можно выбрать окружность, на которой есть точки всех трех цветов?

Ответ. Верно.
Предположим, что нельзя выбрать окружность, на которой есть точки всех трех цветов. Выберем точку A первого цвета и точку B второго цвета и проведем через них прямую l. Если вне прямой l найдется точка С третьего цвета, то на окружности, описанной около треугольника ABC, найдутся точки всех трех цветов (например, A, B *и* С). Значит, вне прямой l нет точек третьего цвета. Но раз хотя бы одна точка плоскости покрашена в третий цвет, то эта точка (назовем ее D) лежит на прямой l. Если теперь рассмотреть точки A и D, то аналогично можно показать, что вне прямой lI нет точек второго цвета. Рассмотрев точки B и D, можно показать, что вне прямой l нет точек первого цвета. То есть вне прямой l нет покрашенных точек. Получили противоречие с условием. Значит, можно выбрать окружность, на которой есть точки всех трех цветов.