## 9 класс

**1. 12 одинаковых тетрадей стоят 242 рубля с копейками. А 17 точно таких же тетрадей стоят 342 рубля с копейками. Сколько стоит одна тетрадь?**

Решение: Пусть тетрадь стоит $x$ копеек, число $x$ целое. По условиям задачи получим: $\begin{cases} 24200 < 12x < 24300 \\ 34200 < 17x < 34300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2016\frac{2}{3} < x < 2025 \\ 2011\frac{13}{17} < x < 2017\frac{11}{17} \end{cases}$.

Данной системе удовлетворяет лишь одно целое число 2017, следовательно, тетрадь стоит 20 руб. 17 коп.

Ответ: 20 руб. 17 коп.

Рекомендации: если ответ подобран, но не проверен (указана только цена), то 0 баллов. Если ответ проверен, то 2 балла. Если в правильном решении границы в неравенствах указаны приближенно или округлены в правильную сторону, то баллы не снижаются, ставится 7 баллов.

**2. Сколькими нулями заканчивается число 49! (факториал натурального числа $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$)?**

Решение: Каждый нуль в произведении получается из множителя 10, который, в свою очередь, получается из произведения $5\cdot2$. Подсчитаем количество пятёрок в 49!, они содержатся в множителях 5, 10, 15, 20, 25 (здесь их две), 30, 35, 40, 45. Итак, их 10 штук. Для получения нулей нужны и 10 множителей, равных 2. Они содержатся в множителях 2, 4 (2 штуки), 6, 8 (3 штуки), 10, 12 (2 штуки). Итак, получаем, что 49! заканчивается 10 нулями.

Ответ: 10.

Рекомендации: если просто выписаны и подсчитаны пятёрки и двойки, без объяснения, что только из них можно получить нули в окончании числа, то 3-4 балла (в зависимости от полноты записи).

**3. Произведение числа 21 и некоторого четырёхзначного числа $x$ является полным кубом. Найдите число $x$.**

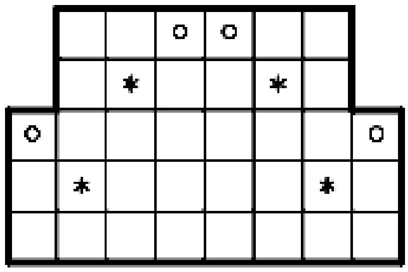
Решение: Произведение $21\cdot x = a^3$. Следовательно, $a^3$ делится на 21, а так как 3 и 7 взаимно простые числа, то $a$ делится на 21. То есть $a = 21b$, $b$ – целое. Значит, $21\cdot x = (21b)^3 \Rightarrow x = 21^2 b^3 = 441b^3$.

Так как $x$ – четырёхзначное число, то $1000 \le x \le 9999$, $1000 \le 441b^3 \le 9999$, $2\frac{118}{441} \le b^3 \le 22\frac{297}{441}$. В этих границах есть единственный полный куб, это 8. Значит $b = 2$, $x = 441\cdot8 = 3528$.

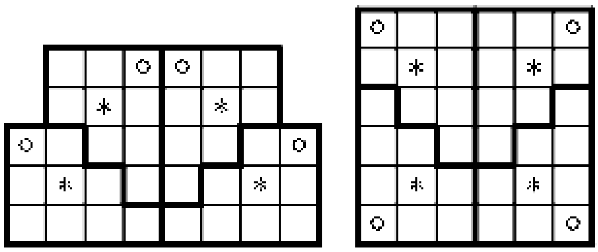
Ответ: 3528.

Рекомендации: если не объяснено почему из равенства $21\cdot x = a^3$ следует делимость $a$ на 21, то при остальном верном решении ставится 4 балла.

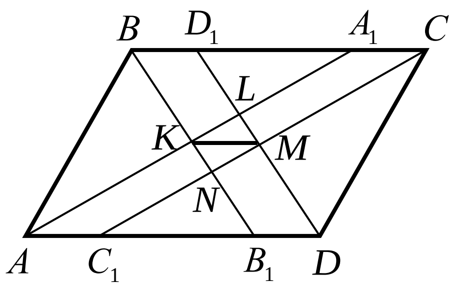
**4. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, по линиям сетки на 4 равные части и сложите из них квадрат так, чтобы кружочки и звёздочки расположились симметрично относительно всех осей симметрии квадрата.**



Решение:



**5. Доказать, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма со сторонами *a* и *b* (*a*>*b*) в пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого равны *a* – *b*.**




Решение: Пусть в параллелограмме $ABCD$ $AB = a$, $BC = b$, биссектрисы $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$.

Так как $AD \parallel BC$, то $\angle BA_1A = \angle A_1AD$, а так как $\angle A = \angle C$, то $\angle A_1AD = \angle BCC_1$, следовательно, $\angle BA_1A = \angle BCC_1 \;\Rightarrow\; AA_1 \parallel CC_1$.

Аналогично, $BB_1 \parallel DD_1$, биссектрисы образуют параллелограмм. Обозначим его $KLMN$.

$\angle BA_1A = \angle A_1AD = \angle BAA_1 \;\Rightarrow\; \triangle ABA_1$ равнобедренный $\Rightarrow$ биссектриса $BK$ является и высотой $\Rightarrow BK \perp A_1A \Rightarrow KLMN$ является прямоугольником.

$BK$ является также и медианой $\triangle ABA_1$, значит $K$ – середина $AA_1$. Аналогично, для равнобедренного треугольника $\triangle CDC_1$, $DM$ – медиана, $M$ – середина $CC_1$.

$\triangle ABA_1 = \triangle CDC_1$, значит $KA_1 = MC$, $KA_1CM$ является параллелограммом $\Rightarrow KM = A_1C = BC - BA_1 = BC - BA = b - a$. Что и требовалось доказать.