9-й класс

9.1 Сумма 100 чисел равна 1000. Наибольшее из этих чисел увеличили вдвое, какое-то другое число уменьшили на 10. После этих действий сумма всех чисел не изменилась. Найдите наименьшее из исходных чисел.

Ответ: 10.

Решение: Пусть M – наибольшее число, t – какое-то другое число. По условию $2M+t-10=M+t$, откуда $M=10$. Все остальные числа не больше 10, а если хотя бы одно из них меньше 10, то сумма всех 100 чисел будет меньше $100\cdot 10=1000$. Значит, все числа из этих 100 равны 10.

9.2 ABCD – параллелограмм. K– точка, такая, что $AK=BD$. Точка M – середина CK. Докажите, что $\angle BMD=90^\circ$.

Решение: Можно основываться на следующем простом факте: если медиана треугольника равна половине той стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный и эта медиана выходит из вершины прямого угла.

См. рис. для случая $BD>AB$.

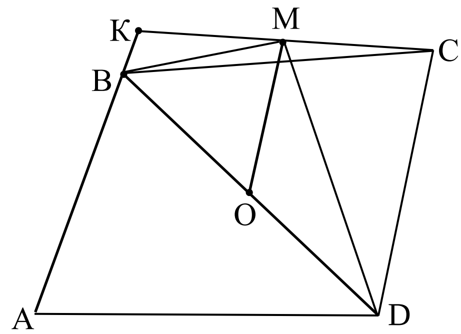
O – середина BD.

Пусть $AB=DC=p$, $AK=BD=q$.

Тогда $BK=AK-AB=q-p$.

OM – средняя линия трапеции DBKC – равна $\frac{DC+BK}{2}=\frac{p+(q-p)}{2}=\frac{q}{2}$.

Т.о. в треугольнике BMD медиана MO равна $\frac{1}{2}BD$. Значит, $\angle BMD=90^\circ$.



9.3 Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трехчленов со старшими коэффициентами p и q. Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p+q$?

Ответ: 0.

Решение: Пусть (x_1, y_1) – координаты вершины одной параболы, (x_2, y_2) – другой. Тогда уравнения парабол могут быть представлены в виде

$$y=p(x-x_1)^2+y_1 \quad \text{и} \quad y=q(x-x_2)^2+y_2.$$

Точка (x_2, y_2) лежит на первой параболе:

$$y_2=p(x_2-x_1)^2+y_1, \qquad (*)$$

а точка (x_1, y_1) лежит на второй параболе:

$$y_1=q(x_1-x_2)^2+y_2.$$

Складывая полученные равенства, найдем

$$y_2 + y_1 = p(x_2 - x_1)^2 + y_1 + q(x_1 - x_2)^2 + y_2,$$

Откуда (т.к. $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$)

$$(p + q)(x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Поскольку $x_1 \neq x_2$ (если $x_1 = x_2$, то из (*) $y_2 = y_1$ и вершины парабол совпадают), то $p + q = 0$.

9.4 В компании из $2n+1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

Решение: Рассмотрим в этой компании максимальную по численности группу людей, в которой каждый знаком с каждым. Утверждается, что в этой группе не менее, чем $n+1$ человек. В самом деле, если в группе не больше n человек, то найдется человек не из этой группы, знающий всех из группы. Добавив его в группу, получим новую большую группу, в которой каждый знаком с каждым. Это противоречит максимальности группы.

Вне этой максимальной группы остается не более n человек. Для них найдется человек (очевидно, из максимальной группы), который знаком с каждым из них.

Этот человек знает всех.

9.5 Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей (каждый простой делитель учитывается один раз; например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3).

Решение: Если n четное число, $n = 2m$, то $n = 4m - 2m$, а числа $2m$ и $4m$ имеют, очевидно, одинаковые простые делители.

Пусть n нечетно, $p_1, ..., p_k$ – его простые делители. Возьмем наименьшее простое $p \neq 2$, отличное от $p_1, ..., p_k$. Тогда $n = pn - (p-1)n$. При этом каждое из чисел $p \cdot n$ и $(p-1)n$ имеют по $k+1$ простому делителю. Для числа $p \cdot n$ это очевидно, а для числа $(p-1)n$ требуется некоторые пояснения. Число $p-1$ имеет простой делитель 2, а другими его простыми делителями могут быть только некоторые из $p_1, ..., p_k$. Почему? Если у $p-1$есть нечетный простой делитель $p' \notin \{p_1, ..., p_k\}$, то $p' < p$, что противоречит минимальности p.