9 класс

9.1. Сколько решений имеет уравнение $(2x+y)^2 = 2017 + x^2$ в целых числах x, y?

Ответ: четыре решения. **Решение**. См. задачу 8.2.

9.2. Дан треугольник ABC, у которого $\frac{BC}{AC} < \frac{1}{2}$. Докажите, что $\angle A < 30°$.

Решение. Пусть $a = BC$, $b = AC$. Первый способ решения. Построим окружность радиуса a, проходящую через точки B и C так, что ее центр O лежит по ту же сторону от прямой BC, что точка A. Тогда A не может лежать внутри этой окружности или на самой окружности, т.к. AC больше ее диаметра. Значит, угол A меньше половины центрального угла BOC, равного 60°.

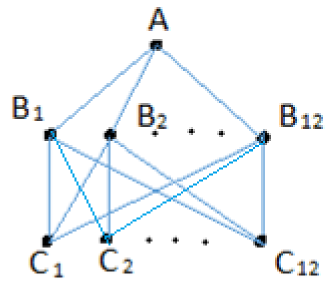
Второй способ решения основан на теореме косинусов. Пусть $x = AB$, $t = \cos\angle A$, тогда $a^2 = x^2 + b^2 - 2bx \cdot t \Leftrightarrow x^2 - 2btx + b^2 - a^2 = 0$. Рассмотрим дискриминант этого уравнения $\frac{D}{4} = b^2t^2 - b^2 + a^2 \ge 0 \Rightarrow t^2 \ge \frac{b^2 - a^2}{b^2} = 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 > 1 - \frac{1}{4}$. Отсюда $\cos\angle A > \frac{\sqrt{3}}{2}$ и значит, $\angle A < 30°$.

9.3. Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, …, 25. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

Ответ: не могло. **Решение.** См. задачу 8.4.

9.4. Какое наименьшее количество кругов единичного радиуса требуется, чтобы полностью покрыть ими треугольник со сторонами 2; 3; 4?

Ответ: три круга. **Решение**. Пусть $AC = 4$, $AB = 2$, $BC = 3$ и пусть C_1, A_1 и B_1 – середины сторон AB, BC и AC соответственно. Заметим, что угол B тупой, т.к. $AC^2 > AB^2 + BC^2$. Поэтому точки B и B_1 лежат внутри круга радиуса 1 с центром в точке O – середине отрезка C_1A_1 (здесь мы учли, что $\angle C_1B_1A_1 = \angle B$ и то, что длина средней линии равна половине AC). Итак, параллелограмм $BA_1B_1C_1$ покрывается единичным кругом с центром O. Два других единичных круга с центрами M и N в серединах AB_1 и B_1C покроют треугольники AC_1B_1 и B_1A_1C (здесь опять используется тот факт, что углы AC_1B_1 и B_1A_1C равны углу B, а значит, тупые). Покажем теперь, что двух единичных кругов недостаточно. В противном случае их центры обязаны совпадать с точками M и N (иначе отрезок AC длины 4 не смог бы накрываться двумя кругами диаметра 2). Но тогда точка B лежит вне обоих этих кругов, т.к. иначе нарушалось бы неравенство треугольника для треугольника ABM ($AB < AM+MB$) или для треугольника NBC ($BC<NB+NC$)°.



9.5. В 9а и 9б классах по 25 человек. В 9а у каждого ученика не менее 13 друзей в классе, а в 9б у каждого не менее 12 друзей в классе. Обязательно ли найдутся три друга (когда каждый в тройке дружит с двумя остальными) **а)** в 9а; **б)** в 9б?

Ответ: **а)** да; **б)** нет. **Решение**. **а)** . Возьмем любых двух друзей A и B. Из остальных 23 человек A имеет не менее 12 друзей, и B имеет не менее 12 друзей. Значит, среди друзей A и B есть хотя бы один общий (в противном случае было бы $12 + 12 \le 23$). Вместе с A и B этот общий друг составляет нужную тройку друзей.

б) Рассмотрим ситуацию (см. граф), когда ученик A дружит с 12 друзьями $B_1, B_2, ..., B_{12}$ и есть ученики $C_1, C_2, ..., C_{12}$, каждый из которых дружит с каждым из учеников $B_1, B_2, ..., B_{12}$. Таким образом, у A есть 12 друзей, у $B_1, B_2, ..., B_{12}$ по 13 друзей, и у каждого $C_1, C_2, ..., C_{12}$ по 12 друзей. Но тройки друзей составить нельзя.