

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**2017-2108 УЧЕБНЫЙ ГОД****ВТОРОЙ ЭТАП****9 КЛАСС****РЕШЕНИЯ**

1. Пусть $\sqrt[3]{2-x} = a, \sqrt{x-1} = b$. Тогда уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a+b=1, \\ a^3+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a, \\ a^3+(1-a)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a, \\ a(a^2+a-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases} \\ \begin{cases} a=-2, \\ b=3, \end{cases} \\ \begin{cases} a=1, \\ b=0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2, \\ x=10, \\ x=1. \end{cases}$$

Ответ: 1, 2, 10.

2. Так как $a_k = \frac{k \cdot (k+1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot (k^2 + k)$, то $a_1 = \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 1)$, $a_2 = \frac{1}{2} \cdot (2^2 + 2)$,
 ..., $a_n = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n)$.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2}(1 + 2 + \dots + n) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

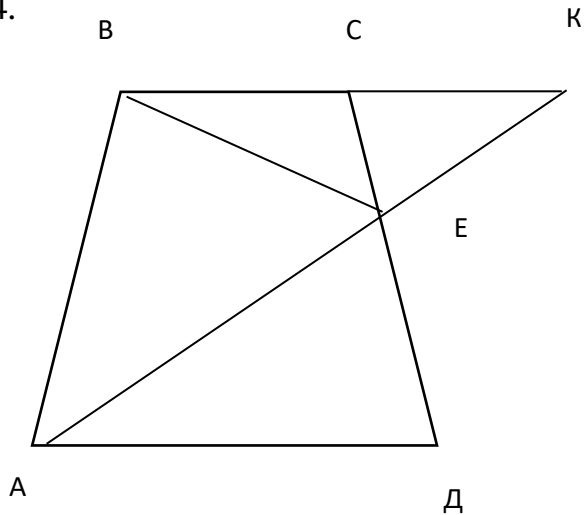
Подставим $n=2017$. Получим $S = 2017 \cdot 1009 \cdot 673$.

Ответ: $2017 \cdot 1009 \cdot 673$.

3. $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) = (1 + \dots + 1) + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} +$
 $\dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq n + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (n^2 - n) = n^2.$

$$\left(t + \frac{1}{t} \geq 2\right)$$

4.



1. Продолжим BC и AE до пересечения в точке K.

2. $AB = BK$ (равнобедренный).

3. $\triangle CEK$ подобен $\triangle DEA$.

4. $S(\triangle BEC) = S(\triangle CEK) = \frac{1}{4} * S(\triangle DEA) = 2/$

5. $\triangle DEA = \triangle BEA$.

6. $S(ABCD) = 8+8+2=18$.

Ответ: 18.

5. Возьмём в качестве 1-ой группы городов любой город А. Во 2-ую группу включим все города, в которые можно сразу добраться из города А. В этих группах вместе не менее 101 города. В третью группу включим те города, в которые невозможно добраться непосредственно из города А, но можно добраться хотя бы из одного города второй группы. В четвёртую группу включим города, в которые невозможно непосредственно добраться ни из города А, ни из городов 2-ой группы, но можно добраться хотя бы из одного города третьей группы. В 3-ей, 4-ой и 5-ой группах не менее 101 города (в 4-ой группе есть хотя бы 1 город). И т.д. Предположим, что групп не менее 59 (т.е. пересадок 57 как минимум). В 6-ой, 7-ой, 8-ой группах городов не менее 101 и т.д. Таким образом всего городов в группах не менее $1*101+19*101=2020$. По условию их 2017. Значит, групп не более 58, а пересадок не более 56. (Город А выбран произвольно)