Математика, 9 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При проверке работ следует руководствоваться следующими важными принципами:

1. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри.
2. При проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты.
3. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.
4. Недопустимо выставлять баллы «за старание участника», в том числе за запись в работе сколь угодно большого по объему текста, не содержащего полезных продвижений в решении задачи.
5. При проверке результата выполнения каждого задания в работе участника олимпиады более высоким приоритетом обладают критерии оценки конкретного задания, приведенные в материалах для жюри.
6. Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Решения и указания по проверке

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы), за отличие от приведенных ниже возможных вариантов рассуждений. ***При этом оценка «7 баллов» ставится за любое верное (!) решение.***

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.

Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

1. Торт разделили на три части. Если от первой отрезать две трети и присоединить ко второй, то третья будет в два раза больше первой, но в два раза меньше второй. Какую часть от торта составляют отрезанные куски?

<u>Ответ:</u> 3/7, 2/7, 2/7.

Решение:

Пусть торт разделили на части x, y и z.

По условию: $x+y+z=1$, $\frac{1}{3}x\cdot 2=z$, $\frac{2}{3}x+y=2z$.

Последовательно выражаем все через x: $z=\frac{2}{3}x$, $\frac{2}{3}x+y=2\cdot\frac{2}{3}x \Rightarrow y=\frac{2}{3}x$.

Подставляем все в равенство $x+y+z=1$, получаем: $x+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x=1$, откуда $\frac{7}{3}x=1$ и $x=\frac{3}{7}$.

Осталось выразить остальные доли: $y=z=\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$.

<u>Критерии:</u>

За ответ с проверкой – 4 балла, без проверки – 1 балл.

2. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c, d выполняется неравенство:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{d}\ge\frac{(a+c)^2}{b+d}.$$

Решение:

Так как числа a, b, c, d положительны, то при умножении обеих частей неравенства на произведение знаменателей получим равносильное неравенство:

$$(b+d)(da^2+bc^2)\ge bd(a+c)^2.$$

Раскрываем скобки: $a^2bd+a^2d^2+b^2c^2+bc^2d\ge a^2bd+2abcd+bc^2d$.

Переносим все в левую часть неравенства, сокращаем подобные слагаемые: $a^2d^2-2abcd+b^2c^2\ge 0$.

Последнее неравенство можно записать так: $(ad-bc)^2\ge 0$.

Так как в ходе равносильных преобразований получили верное неравенство, то и исходное неравенство верно.

Критерии:
Если при умножении на общий знаменатель не упомянута положительность чисел – снимать 2 балла.

3. Найдите все тройки последовательных натуральных чисел, не превышающих 100, произведение которых делится на 1001.

Ответ: 76, 77, 78 и 77, 78, 79.

Решение:

Так как $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то среди этой тройки чисел должно быть число, которое делится на 7, число, которое делится на 11, и число, которое делится на 13. При этом число одновременно не может делиться на 11 и 13, так что делимостью на эти числа должны обладать два разных числа. Так как это три подряд идущих числа, то разность между кратным 11 и кратным 13 не более 2 (то есть, они или стоят рядом, или через одно). Будем отталкиваться от чисел, кратных 13.

Если одно число равно 13, то ближайшее кратное 11 – это 11, но тогда между ними должно быть кратное 7 – а это не так.

Если одно число равно 26, то ближайшее кратное 11 – это 22, расстояние между ними больше 2.

Если одно число равно 39, то ближайшее кратное 11 – это 44, расстояние между ними больше 2.

Если одно число равно 52, то ближайшее кратное 11 – это 55, расстояние между ними больше 2.

Если одно число равно 65, то ближайшее кратное 11 – это 66, но тогда расстояние от 66 до ближайшего кратного 7 больше 2.

Если одно число равно 78, то ближайшее кратное 11 – это 77, но тогда уже рядом стоят два числа, кратные 13, 11 и 7, поэтому третьим к ним можно взять любое из соседних (76 или 79).

Если одно число равно 91, то ближайшее кратное 11 – это 88, расстояние между ними больше 2.

Других чисел, не превосходящих 100 и кратных 13, нет, поэтому перебор окончен.

Если одно число равно 26, то ближайшее кратное 11 – это 22, расстояние между ними больше 2.Если одно число равно 26, то ближайшее кратное 11 – это 22, расстояние между ними больше 2.

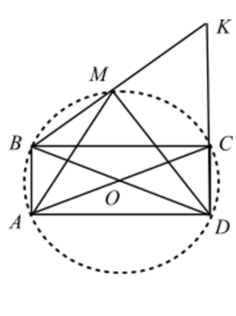
Критерии:
За полный ответ с проверкой ставить 3 балла.
Отсутствие приведенного в работе перебора (возможно, это отсутствие выражается фразой «переберем все случаи и убедимся, что…», но перебора при этом не приводится) баллов к уже выставленным за ответ не добавляет.

4. На продолжении стороны DC за точку C прямоугольника $ABCD$ отмечена точка K. $BD = DK$. Докажите, что биссектриса угла BAC проходит через середину отрезка BK.

Решение:

Опишем окружность около $ABCD$. M – точка пересечения BK и этой окружности. DM – высота в равнобедренном треугольнике BDK.

Значит, M – середина BK. Кроме того, DM – биссектриса, значит, углы BDM и MDK равны, а значит, равны и дуги BM и MC, т.е. AM – биссектриса угла BAC.



<u>Критерии:</u>
Доказано, что M – середина BK – 2 балла.
Доказано равенство углов BDM и MDK (без дальнейших продвижений) – еще 2 балла.

5. В уравнении $*X^2+*X+*=0$ двое по очереди вместо любой звездочки ставят произвольное число (при X^2 ноль ставить нельзя). Первый выигрывает, если полученное уравнение не имеет корней, а второй – в противном случае. Может ли кто-нибудь из них выиграть, независимо от игры соперника?

<u>Ответ:</u> второй игрок выиграет.

Решение:

Да, второй игрок выигрывает независимо от игры первого игрока. Если первый игрок не поставит число C, отличное от нуля, на место свободного члена, то второй игрок на это место поставит число 0, и не зависимо от дальнейшей игры, итоговое уравнение будет иметь корень $x = 0$. Пусть своим ходом первый игрок поставил число C, отличное от нуля, на место свободного члена. Тогда перед x^2 второй игрок поставит число $–C$. Дискриминант получившегося уравнения будет равен: $B^2 + 4C^2 > 0$.

<u>Критерии:</u>
Верный ответ без верной стратегии в баллах не оценивается.
Описана только одна ветвь стратегии (или случай, когда первым ходом первый игрок поставил на место свободного члена число $C \neq 0$, или случай, первый ход был сделан иначе) – 1 балл.
При проверке корректности стратегии второго игрока нужно внимательно следить, чтобы автор решения не пытался «подыгрывать» за первого игрока (например, делая «удобные» – с точки зрения автора – ходы: если первый все равно проигрывает, то для него все ходы одинаково неудобны, поэтому играть он может вообще хаотически).