Шифр

22 ноября 2017 года

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
2017/2018 УЧЕБНОГО ГОДА

Комплект заданий для учеников 10 классов

Номер задания	Макс. балл	Баллы
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
6	7	
Общий балл	42	

Председатель жюри:

________________ (____________________)

Члены жюри:

________________ (____________________)

________________ (____________________)

________________ (____________________)

Уважаемый участник Олимпиады!

1. Решение математической задачи включает не только ответ, но и рассуждение, приводящее к этому ответу. Приведённый ответ без соответствующего рассуждения не может рассматриваться как решение задачи и оценивается не более чем 10 процентами полного балла за задачу (если только решение задачи не подразумевает приведение конкретного примера). Задача признается решённой, если в предложенном тексте достаточно явно изложены все идеи, необходимые для получения и обоснования ответа. В зависимости от того, насколько исчерпывающе эти идеи раскрыты, решённая задача оценивается от 50 до 100 процентов от полного балла.

2. Во время тура запрещается пользоваться справочной литературой, микрокалькуляторами, средствами мобильной связи.

3. В геометрических задачах допускается выполнение чертежей ручкой и/или «от руки», без использования чертёжных приборов. Использование чертёжных инструментов не запрещено.

4. При проверке оценивается только математическое содержание работы. Оценка не снижается за небрежность почерка, орфографические, грамматические и стилистические ошибки, грязь и т.п (если они не препятствуют пониманию решения). Однако, аккуратное оформление улучшает понимание Вашего рассуждения и положительно сказывается на оценке жюри.

5. Задачи не обязательно решать в том порядке, в котором они указаны в тексте.

6. Все задачи равноценны и оцениваются из 7 баллов за задачу.

Максимальная оценка — 42 балла.

Время на выполнение заданий — 4 часа.

Желаем вам успеха!

10.1. Известно, что квадратные относительно x уравнения $2017x^2 + px + q = 0$ и $px^2 + qx + 2017 = 0$ (здесь p и q — заданные действительные числа) имеют один общий корень. Приведите все возможные значения этого общего корня и докажите, что других нет.

10.2. На плоскости построили полукруг с диаметром $AB = 36$ см; внутри него построили полукруг с диаметром $OB = 18$ см (O — центр большего полукруга). Затем построили круг, касающийся обоих полукругов и отрезка AO. Найдите радиус этого круга. Ответ обоснуйте.

10.3. Вася выбрал некоторое действительное число x и выписал бесконечную последовательность: $a_1 = 1 + x^2 + x^3$, $a_2 = 1 + x^3 + x^4$, $a_3 = 1 + x^4 + x^5$, $\ldots$, $a_n = 1 + x^{n+1} + x^{n+2}$, $\ldots$. Оказалось, что $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$ Докажите, что тогда при всех натуральных $n \geqslant 3$ имеет место равенство $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

10.4. В треугольник вписана окружность. Докажите, что треугольник, образованный точками касания, — остроугольный.

10.5. Назовем натуральное число *полупростым*, если оно больше 25 и является суммой двух различных простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может оказаться полупростыми? Ответ обоснуйте.

10.6. Али-баба пришел в пещеру, где есть золото и алмазы. У Али-бабы с собой был один большой мешок. Известно, что полный мешок с золотом весит 200 кг, а если весь мешок наполнить одними алмазами, то он будет весить 40 кг (пустой мешок ничего не весит). Килограмм золота стоит 20 динаров, а килограмм алмазов — 60 динаров. Какую наибольшую сумму денег может выручить Али-баба, если он может унести с собой в этом мешке не более 100 кг? Ответ обоснуйте.