Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

2017/18 учебный год

10 класс

Дорогой друг! Желаем успеха!

Инструкция для учащихся

Олимпиада по математике состоит из 6 заданий. На выполнение олимпиады отводится 4 астрономических часа. Каждое задание оценивается в 7 баллов, решение задания необходимо расписать подробно. Задания можно выполнять по своему усмотрению. Если задание не удается выполнить сразу, перейдите к следующему. Если останется время, вернитесь к пропущенным заданиям.

Калькулятором, справочной литературой пользоваться нельзя!

Задания (максимальный балл за всю работу – 42)

1. Числа a и b удовлетворяют равенству $a^2b^2/(a^4 - 2b^4) = 1$. Найдите все возможные значения выражения $(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$.

2. Первая и вторая цифры двузначного числа N являются соответственно первым и вторым членами некоторой геометрической прогрессии, а само число N втрое больше третьего члена этой прогрессии. Найдите все такие числа N.

3. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 4$. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, последовательно переместив точку A на некоторое расстояние параллельно отрезку BC (точка A_1), затем точку B – параллельно отрезку A_1C (точка B_1) и, наконец, точку C – параллельно отрезку A_1B_1 (точка C_1). Чему равна длина отрезка B_1C_1, если оказалось, что угол $A_1B_1C_1$ прямой и $A_1B_1 = 1$?

4. Пусть a, b, c и d – такие действительные числа, при которых при всех действительных значениях x имеет место равенство $|2x + 4| + |ax + b| = |cx + d|$. Докажите, что $d = 2c$.

5. Владислав Владимирович, взяв менее 100 рублей, пошёл гулять. Заходя в какое-либо кафе и имея при этом m рублей n копеек, он тратил n рублей m копеек (m и n – натуральные числа). Какое наибольшее число кафе мог посетить Владислав Владимирович?

6. На координатной плоскости xOy отмечена точка A (1; 2). За один ход разрешается выбрать действительное число a и отметить на плоскости точку, симметричную одной из уже отмеченных относительно прямой $y = ax – (2a + 1)$. Может ли за несколько ходов на плоскости появиться среди отмеченных точек точка B(-1; 1)? Ответ обосновать.