11 класс

1. Найдите количество целочисленных точек (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}=\frac{1}{2017}.$$

2. На шахматной доске расставлены четыре ладьи так, что они бьют все белые клетки.

а) Приведите пример такой расстановки.

б) Определите количество таких расстановок.

3.Найдите все неотрицательные многочлены g, удовлетворяющие тождеству

$$g(x+y)=g(x)+g(y)+2\sqrt{g(x)g(y)},$$

при всех неотрицательных x и y.

4. Пусть $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$ выпуклый 2017 – угольник, B_k середины ребер A_kA_{k+1}, $k=1,..,2016$, B_{2017} середина ребра A_1A_{2017}. Докажите, что площадь многоугольника $B_1B_2B_3....B_{2016}B_{2017}$ не меньше половины площади $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$, т. е.

$$S_{A_1A_2A_3....A_{2017}}<2S_{B_1B_2B_3....B_{2017}}.$$

5. Основание пирамиды *ABCDP* с вершиной *P*, вписанный в окружность четырехугольник. Известно, что прямые *AD* и *BC* пересекаются в точке *K*, вне этой окружности. Углы $\angle ADP$ = $\angle BCP$=90°, а углы $\angle APK$ *и* $\angle BPK$ острые. Докажите, что прямая *PK* перпендикулярна прямой *AB*.

11 класс

1. Найдите количество целочисленных точек (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}=\frac{1}{2017}.$$

2. На шахматной доске расставлены четыре ладьи так, что они бьют все белые клетки.

а) Приведите пример такой расстановки.

б) Определите количество таких расстановок.

3.Найдите все неотрицательные многочлены g, удовлетворяющие тождеству

$$g(x+y)=g(x)+g(y)+2\sqrt{g(x)g(y)},$$

при всех неотрицательных x и y.

4. Пусть $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$ выпуклый 2017 – угольник, B_k середины ребер A_kA_{k+1}, $k=1,..,2016$, B_{2017} середина ребра A_1A_{2017}. Докажите, что площадь многоугольника $B_1B_2B_3....B_{2016}B_{2017}$ не меньше половины площади $A_1A_2A_3....A_{2016}A_{2017}$, т. е.

$$S_{A_1A_2A_3....A_{2017}}<2S_{B_1B_2B_3....B_{2017}}.$$

5. Основание пирамиды *ABCDP* с вершиной *P*, вписанный в окружность четырехугольник. Известно, что прямые *AD* и *BC* пересекаются в точке *K*, вне этой окружности. Углы $\angle ADP$ = $\angle BCP$=90°, а углы $\angle APK$ *и* $\angle BPK$ острые. Докажите, что прямая *PK* перпендикулярна прямой *AB*.