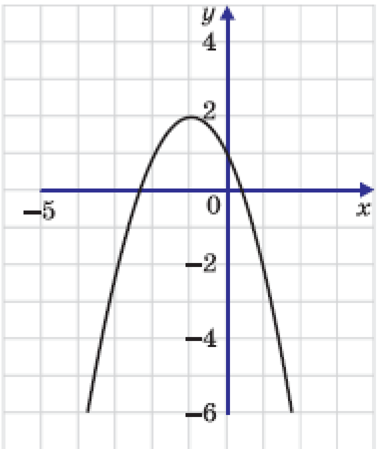
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
2018/2019 УЧЕБНЫЙ ГОД
10 КЛАСС (решения)

1. (*7 баллов*) На координатной плоскости изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$ (см. рисунок). На этой же координатной плоскости схематически изобразите график функции $y = cx^2 + 2bx + a$. Ответ поясните.



Решение.

Вычислим значения a, b и c.

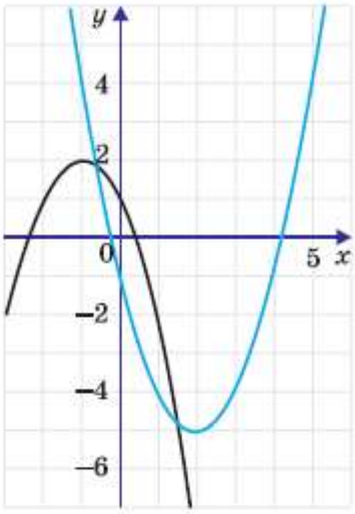
Способ 1. Выберем три удобные точки данного графика, например, (0; 1); (1; -2) и (-1; 2). Учитывая, что $y(0) = c$, $y(1) = a+b+c$, $y(-1) = a-b+c$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} c = 1, \\ a + b + c = -2, \\ a - b + c = 2. \end{cases}$$

Её решением является: $a = -1$, $b = -2$, $c = 1$.

Способ 2. Заметим, что данный график получается параллельным переносом графика функции $y = -x^2$, поэтому $a = -1$. Значение $b = -2$ вычисляется из равенства $-\frac{b}{2a} = -1$ (абсцисса вершины параболы), а $c = y(0) = 1$.

Следовательно, искомый график задается уравнением $y = x^2 - 4x - 1 \Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 5$.



2. (*7 баллов*) Докажите, что если произведение двух положительных чисел равно 1, то сумма этих чисел не меньше 2.

Решение.

Способ 1. Рассмотрим два числа x и $\frac{1}{x}$, удовлетворяющие условию, причём $x > 0$, а значит $\frac{1}{x} > 0$. Сравним их сумму с 2, предполагая, что сумма не меньше 2:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0,$$

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0.$$

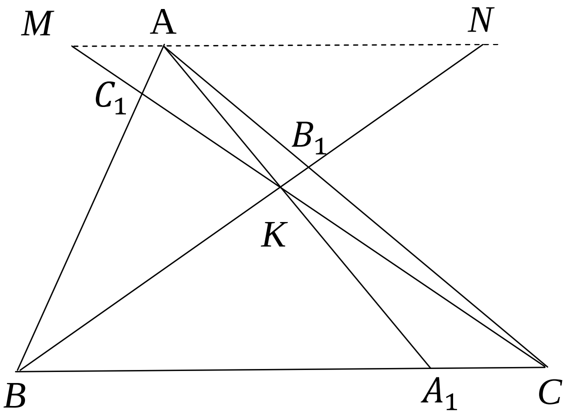
Данное неравенство является истинным, так как числитель и знаменатель дроби положительны и числитель обращается в нуль при $x = 1$.

Способ 2. Используем неравенство Коши: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}, a \geq 0, b \geq 0$.

Пусть в неравенстве Коши $b = \frac{1}{a}$, $\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}}$, то есть $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Равенство $a + \frac{1}{a} = 2$ достигается при $a = 1$.

3. (*7 баллов*) В треугольнике ABC выбрана любая точка K. Прямая AK пересекает сторону BC в точке A_1, прямая BK пересекает AC в точке B_1, прямая CK пересекает AB в точке C_1. Докажите, что $\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{BC_1}$.

Решение.



1. Через точку A проведём прямую MN параллельно BC.

$$BK \cap MN = N,$$
$$CK \cap MN = M.$$

2. $\Delta MKN \sim \Delta CKB$: $\frac{AK}{KA_1} = \frac{MN}{CB} = \frac{MA+AN}{CB} = \frac{MA}{CB} + \frac{AN}{CB}$.

3. $\Delta MAC_1 \sim \Delta CBC_1$: $\frac{MA}{CB} = \frac{AC_1}{BC_1}$.

4. $\Delta NAB_1 \sim \Delta BB_1C$: $\frac{NA}{CB} = \frac{AB_1}{B_1C}$.

5. Таким образом, $\frac{AK}{KA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{BC_1}$

4. (*7 баллов*) Докажите, что точки пересечения прямых $x + 2y = 19$ и $y + 2x = 98$ с гиперболой $y = \frac{1}{x}$ лежат на одной окружности.

Решение.

Пусть A, B, C и D — точки пересечения прямых с гиперболой $y = \frac{1}{x}$.

Приведём каждое из уравнений прямых к виду:

$$x + 2y - 19 = 0,\ y + 2x - 98 = 0.$$

Перемножив левые и правые части получившихся уравнений, получим:

$$(x + 2y - 19)(y + 2x - 98) = 0.$$

Преобразуем его, учитывая, что точки A, B, C и D лежат на гиперболе, т. е. для них xy=1:

$$2x^2+5+2y^2-98(x+2y)-19(y+2x)+19\cdot 98=0.$$

Это уравнение является уравнением окружности, так как его можно привести к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Комментарий. Уравнение приведено к виду $(x-34)^2 + \left(y - \frac{215}{4}\right)^2 = \frac{49785}{16}$ – 7 баллов.

Преобразования не выполнены до конца – 6 баллов.

5. (*7 баллов*) Король решил устроить проверку своим ста мудрецам и сообщил, что на следующий день он выстроит всех с завязанными глазами в очередь и наденет каждому чёрный или белый колпак. После того, как глаза будут развязаны, каждый, начиная с последнего в очереди, назовёт предполагаемый цвет своего колпака. Если он при этом не угадает, то будет казнён. У мудрецов ещё есть время договориться, как они будут действовать завтра. Скольким мудрецам наверняка удастся спастись?

Решение. Опишем стратегию, которой должны придерживаться мудрецы. Последний в очереди смотрит вперёд, считает число чёрных колпаков и говорит «чёрный», если это число чётно. При этом он не может спастись наверняка. Однако, 99-й, 98-й, ..., 1-й в очереди получают очень важную информацию. Так, 99-й снова считает число чёрных колпаков на впереди стоящих мудрецах и если чётность этого числа изменилась, то на нём чёрный колпак, и он говорит «чёрный». Затем 98-й считает число чёрных колпаков на впереди стоящих и, зная чётность числа чёрных колпаков на впереди стоящих без него и вместе с ним, однозначно определяет цвет своего колпака и т.д. Мудрецы с 99-го до 1-го остаются в живых.

Ответ. 99 мудрецам наверняка удастся спастись.