2018 год

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

Решения

10 класс

1. Для области допустимых значений переменной x составим систему ограничений: $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ \frac{x+2}{x+3} \geq 0. \end{cases}$ Имеем x € (-∞; -3) ∪ [-2; +∞).

Теперь можем избавиться от знака модуля. Следовательно, неизвестная величина x должна удовлетворять уравнению: $x^2 + x - 2 = x + 2$, которое имеет решения $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, причем оба эти решения входят в область допустимых значений переменной x.

Ответ: 0.

2. Раскроем скобки и получим $-3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3yz^2 - 3z^2x + 3zx^2$. Это число делится на 3, а число 2018 на 3 не делится.

Ответ: такое равенство невозможно.

3. Так как половина учеников – лодыри, то их число равно 16. Если сложить вместе число способных и рыжих из них, получим 5 + 3 = 8. В этой сумме один способный и рыжий одновременно подсчитаны дважды, поэтому число учеников, которые являются способными и рыжими, но не одновременно, равно 8-1=7. Все остальные лодыри 16-7=9 - это одновременно и не рыжие, и неспособные.

Ответ: 9.

4. Пусть p *и* q – первоначальные доли золота в первом и втором кусках соответственно, x – масса отрезанного куска. Тогда доля золота в сплаве отрезанной первой части с остатком второго равна $\frac{xp+(12-x)q}{12}$, а в сплаве отрезанной части второго куска с остатком первого $\frac{xq+(6-x)p}{6}$. Приравнивая эти доли, получаем $3x(p-q) = 12(p-q)$ (по условию $p \neq q$), следовательно, $x = 4$.

Ответ: 4 кг.

5. Треугольник PQR можно вписать двумя способами.
1) Вершина прямого угла R лежит на гипотенузе AB. Пусть M и N – проекции точки R на катеты треугольника ABC. Треугольники RMQ и RNP равны, значит, MR и NR имеют длину 5, а катет треугольника PQR не меньше 5. Тогда его площадь не менее 12,5.
2) Вершина прямого угла R лежит на катете. Пусть M – проекция вершины Q, лежащей на гипотенузе треугольника ABC, QM = MB = x, PC = y. Треугольники PCR и RMQ равны, поэтому RM = PC = y. Тогда 2x + y = 10, и гипотенуза малого треугольника имеет длину $\sqrt{x^2 + y^2}$. Площадь треугольника PQR равна $\frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{x^2 + (10-2x)^2}{2} = \frac{5x^2 - 40x + 100}{2}$. Наименьшее значение этот квадратный трехчлен достигает при $x = \frac{40}{10} = 4$. Площадь такого треугольника равна 10.

Ответ 10.