МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2018-2019 УЧЕБНЫЙ ГОД

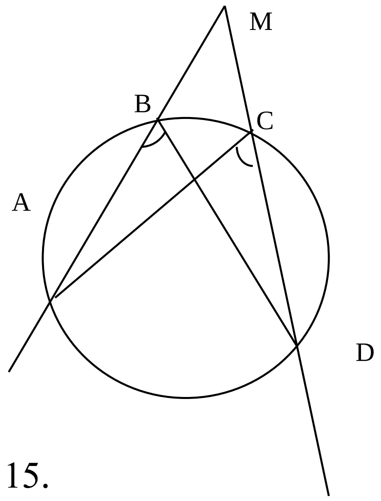
10 КЛАСС

Максимальный балл: 35 баллов (по 7 баллов за каждое задание)

РЕШЕНИЯ

1. (a – b) (b – c) (c – a) = a + b + c = b + a + c = (b – a) (a – c) (c – b) =
= – (a – b) (b – c) (c – a) = – (a + b + c)
Таким образом, a + b + c = – (a + b + c), откуда a + b + c = 0 и делится на 2018.

2. Из условия следует, что четырёхугольник ABCD – вписанный. Тогда $MD \cdot MC = MA \cdot MB = (3+2) \cdot 3 = 15$



Ответ: 15.

3. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} |x-1| - y = 1 - a^4 - a^4(x-1)^4 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1\,, \end{cases},$$

и сделаем замену $t = x - 1$.
Получим

$$\begin{cases} |t| - y = 1 - a^4 - a^4t^4, \\ t^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Видим, что, если (t, y) – решение системы, то (–t, y) – также решение. Если решение единственно, то t = 0, тогда

$$\begin{cases} y = a^4 - 1, \\ y^2 = 1\,. \end{cases}$$

При $y = -1$ $a = 0$, при $y = 1$ $a^4 = 2$.
Пусть $a = 0$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} |t| - y = 1, \\ t^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Решений больше одного – например, (0, –1), (1, 0) (на первом месте в паре – значение t).

Пусть $a^4 = 2$, тогда система имеет вид

$$\begin{cases} |t| - y = -1 - 2t^4 \\ t^2 + y^2 = 1, \end{cases} <=> \begin{cases} y = 1 + |t| + 2t^4, \\ y^2 = 1 - t^2. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $y \geq 1$, причём $y = 1$ только при $t = 0$.

Во втором уравнении при $t \neq 1$ $y < 1$. Следовательно, при $t \neq 0$ система решений не имеет, и (0, 1) – единственное решение при $a^4 = 2$.

Ответ: $\pm\sqrt[4]{2}$.

4. Разделим доску на квадраты 2x2 и раскрасим их в шахматном порядке. Получим 13 квадратов одного цвета и 12 – другого. Любой прямоугольник 1x4 содержит ровно две белых и ровно четыре чёрных клетки. Таким образом, в случае положительного ответа на поставленный в задаче вопрос, количество белых и чёрных квадратов должно быть равным.

Ответ: нельзя.

5. Очевидно, $b \neq 0$. Из условия следует, что $f(1) = a + b = 11$, и $f(11) = 121a + 11b = 1111$, откуда $a = 9, b = 2$.

Докажем теперь, что функция $f(x) = 9x^2 + 2x$ обладает данным свойством.

$f(x) = x(9x + 2)$

Пусть n = $\underbrace{11\ldots11}_{k}$, тогда 9n + 2 = $1\underbrace{00\ldots0}_{k-1}01$.

Тогда f (n) = $\underbrace{11\ldots11}_{k} \cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1 = \underbrace{11\ldots11}_{k} \cdot (1\underbrace{00\ldots000}_{k} + 1) =$

$= \underbrace{11\ldots11}_{k}\underbrace{00\ldots00}_{k} + \underbrace{11\ldots11}_{k} = \underbrace{11\ldots11}_{2k}$

Ответ: $a = 9, b = 2$

Замечание для проверяющих. Если a и b найдены, но не доказано данное свойство функции, то 1 балл.