Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 учебном году

10 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

10.1. *Рассматриваются всевозможные пары квадратных уравнений $x^2+px+q=0$ и $x^2+qx+p=0$ такие, что каждое уравнение имеет два различных корня. Верно ли, что выражение $\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_4}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_2x_4}$, где числа x_1, x_2 — корни первого уравнения, а числа x_3, x_4 — корни второго, одно и то же для всех таких пар (то есть не зависит от чисел p и q)? Ответ обоснуйте.*

Решение: Согласно теореме Виета

$$x_1x_2 = -(x_3+x_4) = q \text{ и } x_3x_4 = -(x_1+x_2) = p.$$

Тогда

$$\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_4} = \frac{x_3+x_4}{x_1x_3x_4} = -\frac{q}{px_1}\,.$$

Аналогично

$$\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_2x_4} = -\frac{q}{px_2}\,.$$

Тогда

$$\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_1x_4}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_2x_4} = -\frac{q}{p}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right) = -\frac{q}{p}\cdot\frac{x_2+x_1}{x_1x_2} = -\frac{q}{p}\cdot\left(-\frac{p}{q}\right) = 1,$$

то есть одно и то же для всех пар уравнений.

Примечание 1: Такие пары уравнений существуют. В задании не требуется приводить их примеры.

Примечание 2: Задачу можно решить и «в лоб», записав корни уравнений по формуле корней (через дискриминанты), подставив их в выражение, и проделав необходимые преобразования. Решение получится несколько длиннее, но и только.

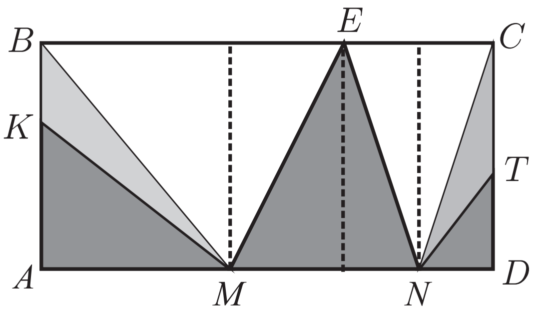
Ответ: Верно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
В решении нет примеров пар таких уравнений	баллы не снижать

Корни уравнений верно найдены и подставлены в выражение ИЛИ верно записана теорема Виета для обоих уравнений, но дальнейшие преобразования неверны, или не завершены	2 балла
Верный ответ проиллюстрирован несколькими примерами	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

10.2. *В прямоугольнике $ABCD$ точка E лежит на стороне BC и не совпадает с точками B и C. Точка M — произвольная точка на отрезке AD, а точка N — произвольная точка на отрезке MD. Точка K лежит на отрезке AB, а точка T — на отрезке CD. Докажите, что сумма площадей треугольников AKM, MEN и NDT не превосходит половины площади прямоугольника.*



К решению задачи 10.2

Решение:

Способ 1. Заметим, что при перемещении точки E по стороне BC площадь треугольника MEN (а тогда и сумма площадей треугольников AKM, MEN и NDT) не меняется; следовательно, можно считать, что проекция точки E лежит на отрезке MN. Проведём через точки M, E и N прямые, параллельные стороне AB (на рисунке они изображены пунктирными линиями) — они разделят прямоугольник на три меньших. Также проведём отрезки MB и NC.

Теперь видно, что белые треугольники составляют ровно половину прямоугольника (каждый такой треугольник — половина соответствующего малого прямоугольника), а треугольники AKM, MEN и NDT образуют фигуру (на рисунке она самая тёмная) меньшей площади (до белых треугольников не хватает треугольников, окрашенных в серый цвет — треугольников KMB и CNT). Это замечание завершает доказательство. Ещё можно отметить, что условие задачи не запрещает совпадение точек K и B (точек T и C); в случае одновременного совпадения будет достигаться равенство площадей белых и чёрных фигур.

Способ 2. Пусть $AB = CD = y$, $AK = t \leqslant y$, $DT = s \leqslant y$. Тогда

$$S_{AKM} = \frac{1}{2}t \cdot AM \leqslant \frac{1}{2}y \cdot AM, \; S_{MEN} = \frac{1}{2}y \cdot MN, \; S_{NDT} = \frac{1}{2}s \cdot ND \leqslant \frac{1}{2}y \cdot ND.$$

Отсюда

$$S_{AKM} + S_{MEN} + S_{NTD} \leqslant \frac{1}{2}y \cdot AM + \frac{1}{2}y \cdot MN + \frac{1}{2}y \cdot ND = \frac{1}{2}y \cdot AD = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Примечание: Утверждение задачи остаётся верным, если в условии заменить прямоугольник на произвольный параллелограмм. Доказательство при этом почти не меняется.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
В полном решении используется, что проекция точки E попадает на отрезок MN, но не пояснено, почему можно так считать	6 баллов
Утверждение задачи проиллюстрировано несколькими частными случаями	1 балл
Верные утверждения, из которых не виден ход решения (вне зависимости от наличия их доказательств)	0 баллов

10.3. *В далёкие времена застоя в Советском Союзе в ходу были монеты достоинством 15 и 20 копеек. У школьника Валеры была некоторая сумма денег только такими монетами. Причём двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег Валера истратил, отдав две монеты за билет в кино. Половину оставшихся денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у Валеры вначале? Ответ обоснуйте.*

Решение: Одна пятая капитала Валеры может быть либо 30, либо 35, либо 40 копеек. Тогда после покупки билета у него должно было остаться соответственно 120, 140 или 160 копеек, а цена обеда составила либо 60, либо 70, либо 80 копеек. Максимальная стоимость трёх монет — 60 копеек, поэтому две последние ситуации невозможны. Итак, Валера пообедал на 60 копеек, отдав три «двадцатчика», заплатил за билет в кино 30 копеек (отдав 2 «пятнадчика») и ещё 60 копеек у него осталось. Эта сумма имеющимися монетами могла быть набрана либо как 4 монеты по 15 копеек, либо 3 по 20 копеек. В первом случае оказывается, что у Валеры «пятнадчиков» было 6, а «двадцатчиков» — 3, что противоречит условию. Второй случай приводит к верному ответу: 2 монеты по 15 коп и 6 монет по 20 коп.

Ответ: 2 монеты по 15 коп и 6 монет по 20 коп.

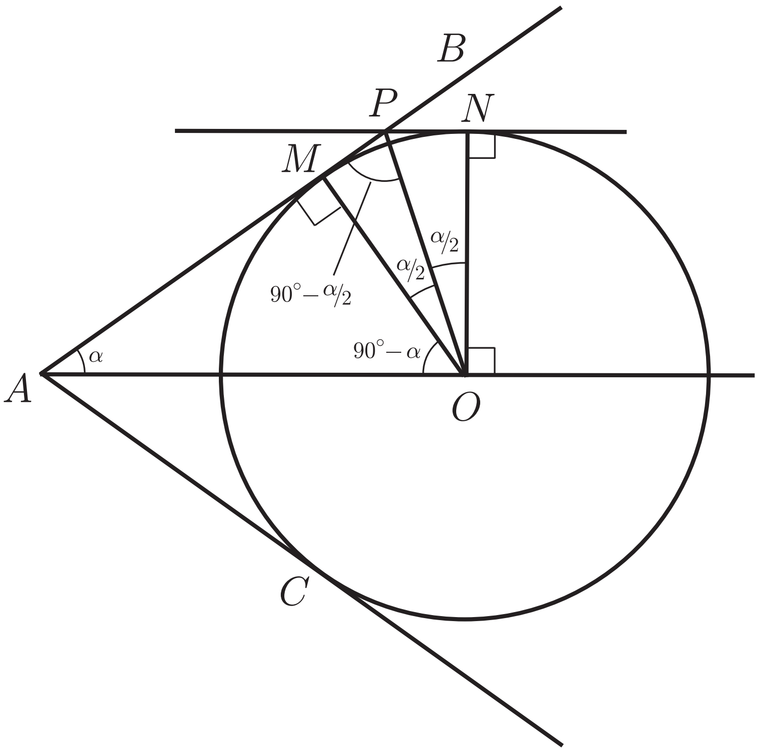
Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения имеются вычислительные ошибки (возможно, приведшие к неверному ответу)	снять 1 балл за каждую ошибку

При переборном решении остался не разобранным ровно один случай	4 балла
При переборном решении остались не разобранными более одного случая	2 балла
Верный ответ, подкреплённый расчётами, без доказательства его единственности	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

10.4. *Окружность с центром O вписана в угол BAC. Касательная к окружности, параллельная прямой AO, пересекает луч AB в точке P. Докажите, что верно равенство $AP = AO$.*

Решение: Пусть M и N — соответственно точки касания окружности и прямых AB и NP — см. рисунок. Обозначим $\angle BAO = \alpha$. Тогда из прямоугольного треугольника AMO находим, что $\angle AOM = 90^\circ - \alpha$. Угол AON — прямой, поэтому $\angle MON = \alpha$. Далее, треугольники MOP и NOP равны, так как окружность с центром в точке O вписана в угол MPN, откуда $\angle MOP = \angle NOP = \dfrac{\alpha}{2}$. Теперь рассмотрим треугольник APO. В нём $\angle AOP = 90^\circ - \alpha + \dfrac{\alpha}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ и $\angle APO = 180^\circ - \alpha - \angle AOP = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Значит, он — равнобедренный с основанием PO, что и требуется доказать.



К решению задачи 10.4

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верное доказательство	7 баллов
Имеется идея выразить все углы через один, но при этом доказательство не завершено или неверно	2 балла
Верные утверждения, из которых не виден ход решения (вне зависимости от наличия их доказательств)	0 баллов

10.5. *Возрастающая геометрическая прогрессия состоит из четырёх различных положительных чисел, три из которых образуют арифметическую прогрессию. Каким числом может быть знаменатель этой прогрессии? Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.*

Решение: Рассмотрим произвольную возрастающую геометрическую прогрессию из четырёх чисел b, bq, bg^2, bq^3 ($b > 0$, $q > 1$). Если первые три члена (аналогично, если последние три) образуют арифметическую прогрессию, то имеем равенство $2bq = b + bg^2$, откуда $q^2 - 2q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = 1$. Противоречие.

Пусть арифметическую прогрессию образуют первый, второй и четвёртый член. Это условие эквивалентно равенству

$$2bq = b + bg^3 \Leftrightarrow q^3 - 2q + 1 = 0 \Leftrightarrow (q-1)(g^2 + q - 1) = 0.$$

Полученное уравнение имеет три корня. $g_1 = 1$, $q_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $q_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Но все они не удовлетворяют условию $q > 1$. Этот случай также невозможен.

Пусть арифметическую прогрессию образуют первый, третий и четвёртый член. Это условие эквивалентно равенству

$$2bq^2 = b + bg^3 \Leftrightarrow q^3 - 2q^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (q-1)(g^2 - q - 1) = 0.$$

Полученное уравнение имеет три корня. $g_1 = 1$ и $q_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ не удовлетворяют условию $q > 1$. А третий корень $q_3 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ — удовлетворяет. При этом число b может быть любым положительным — условие задачи будет выполнено.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Примечание 1: Можно сразу полагать b любым положительным числом, например, 1, поскольку очевидно, что при уменьшении (увеличении) всех членов последовательности в одно и то же число раз свойство «быть прогрессией» (хоть геометрической, хоть алгебраической) сохраняется, а знаменатель геометрической прогрессии остаётся тем же самым. Этот факт следует при проверке решения считать очевидным.

Примечание 2: В приведённом решении последняя ситуация легко сводится к предыдущей, если возрастающую прогрессию заменить на убывающую, а порядок чисел поменять на противоположный. Конечно, при такой замене нас будет интересовать q из интервала $(0; 1)$, а в ответ пойдёт число, равное $\frac{1}{q}$.

<u>*Рекомендации по проверке:*</u>

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Верно проанализированы две ситуации из трёх: арифметическую прогрессию образуют 1) три последовательных члена геометрической прогрессии; 2) первый второй и четвёртый член; 3) первый третий и четвёртый член	5 баллов
Верно проанализирована ситуация 1 (см. пункт на 5 баллов) и приведён верный пример четырёх чисел (со знаменателем прогрессии $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$)	4 балла
Верно проанализирована только одна ситуация из трёх (см. пункт на 5 баллов)	3 балла
Приведён верный пример четырёх чисел (со знаменателем прогрессии $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$)	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

10.6. *Имеется* 300 *яблок, любые два из которых отличаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в* 150 *пакетов по два яблока в каждом так, что любые два пакета различаются по весу не более, чем в два раза.*

Решение: Упорядочим все яблоки по весу, например, в порядке убывания. Пары образуем так: первое яблоко с трёхсотым, второе — с двести девяносто девятым, третье — с двести девяносто восьмым, ..., сто пятидесятое — со сто пятьдесят первым. Докажем что любые два пакета отличаются по весу не более, чем в два раза. Возьмём любые два пакета. Пусть веса яблок в одном равны a и d, во втором — b и c. Можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ и $a \leqslant 3d$. Тогда $\frac{4}{3}a \leqslant (a+d) \leqslant 4d$ и $2d \leqslant 2c \leqslant (b+c) \leqslant 2b \leqslant 2a$, откуда $\frac{1}{2a} \leq \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{2d}$. Перемножая левые и правые части неравенств, получаем $\frac{2}{3} \leq \frac{a+d}{b+c} \leqslant 2$. Тогда $(a+d) \leqslant 2(b+c)$, и $(b+c) \leqslant 1{,}5(a+d) < 2(a+d)$, что и требуется доказать.

Примечание: Пример, когда все яблоки, кроме одного, весят поровну, а одно особое — ровно в три раза больше, показывает, что улучшить оценку нельзя. В задаче не требуется обосновывать точность оценки, поэтому в решении не требуется приведения никакого примера.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Верно указано, как в общем случае следует раскладывать яблоки по пакетам, но не доказано, что условие задачи в этом случае будет обязательно выполнено	3 балла
Задача решена в частных случаях (в любом количестве)	1 балл
Доказательство принципиально неверно	0 баллов