Муниципальный этап
Всероссийской олимпиады школьников
по математике

2018/19 учебный год

10 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Сколько среди целых чисел от 100 до 10 000 таких, в записи которых встречаются ровно 3 одинаковые цифры?

Решение. Если повторяющаяся три раза цифра есть нуль, то, добавляя впереди одну из 9 других цифр, получим 9 чисел. Если повторяется в числе цифра $a \neq 0$, то чисел с разными b, $b \neq a$, будет $9 \cdot 4 \cdot 9$. Итак, всего 333 числа.

Ответ: 333.

2. УСЛОВИЕ

Доказать, что среди любых 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое незнакомых друг с другом.

Доказательство. Пусть A – один из шести человек. Тогда среди остальных пяти найдутся либо трое с ним знакомых, либо – трое с ним незнакомых. Пусть, например, B, C, D знакомы с A. Если среди них найдутся двое знакомых друг с другом, то вместе с A они образуют тройку парно знакомых. Если же все трое не знакомы друг с другом, то они дадут искомую тройку попарно незнакомых людей. Аналогично разбирается случай, когда B, C, D не знакомы с A.

3. УСЛОВИЕ

Доказать, что если p – простое число и $p > 3$, то число $p^2 - 1$ делится на 24.

Доказательство. Очевидно, $(p - 1)\, p\, (p + 1)$ делится на 3, но p – простое и $p > 3$, значит p не делится на 3, т.е. $(p - 1)(p + 1)$ делится на 3. Кроме того, p – нечетно (как простое, большее двух), значит, четны $p - 1$ и $p + 1$, поэтому одно из них заведомо делится на 2, другое – на 4, т.е. $(p - 1)(p + 1)$ делится на 8.

4. УСЛОВИЕ

Найти действительные решения уравнения $(x + 2)^4 + x^4 = 82$.

Указание. Обозначим $x + 1 = y$, тогда $(y + 1)^4 + (y - 1)^4 = 82$, или

$y^4 + 6y^2 - 40 = 0$, откуда $y^2 = -10$ или $y^2 = 4$.

Ответ. $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

5. УСЛОВИЕ

Сосновый лес растет на участке, имеющем форму квадрата со стороной 1 км. Зная, что весь этот лес состоит из 4500 деревьев диаметра 50 см, доказать, что в лесу можно выбрать прямоугольную площадку 10 м × 20 м, на которой не растет ни одно дерево.

Доказательство. Разобьем участок на прямоугольники размером 10 м × 20 м и на полосы между ними: на одной стороне участка отложим 48 отрезков длиной в 20 м каждый, причем между соседними отрезками оставим промежуток в 0,6 м, и два крайних отрезка по 5,9 м каждый. На второй стороне квадрата отложим 95 отрезков длины 10 м каждый, разделенных промежутками длины, большей 0,5 м каждый. Тогда на участке окажется $48 \cdot 95 = 4560$ прямоугольников, разделенных полосами, шириной, большей 0,5. Т.к. деревьев всего 4500 и ни одно из них не может попасть больше чем в один прямоугольник, то найдутся прямоугольники (даже не меньше 60), на которых нет деревьев.

6. УСЛОВИЕ

В шахматном турнире участвовало 8 человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_8$ – количество очков, набранных каждым шахматистом. По условию $x_1 > x_2 > \ldots > x_8$.

Лучший участник сыграл 7 партий, значит, $x_1 \le 7$, т.к. $x_2 < x_1$, то $x_2 \le 6{,}5$. Четыре последних шахматиста сыграли между собой 6 партий, в которых набрали 6 очков, значит, общее число их очков не меньше 6, т.е.

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \ge 6,$$

но по условию $x_2 = x_5 + x_6 + x_7 + x_8$, значит, $x_2 \ge 6$. Итак, $6 \le x_2 \le 6{,}5$, т.е. $x_2 = 6{,}5$ или $x_2 = 6$. Если бы $x_2 = 6{,}5$, то второй шахматист выиграл 6 партий, а одну свел вничью, следовательно, первый шахматист не выиграл у второго, поэтому $x_1 \le 6{,}5$, т.е. $x_1 \le x_2$, что противоречит условию. Итак, $x_2 \ne 6{,}5$, значит, $x_2 = 6$, следовательно, $x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 6$, т.е. четыре последних шахматиста все свои очки набрали лишь из встречи друг с другом, а всем первым игрокам – проиграли, в частности, седьмой игрок проиграл третьему.