2018

Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап

Решения

11 класс

1. Обозначим искомое число как $\overline{abcd}$ = 1000a + 100b + 10c + d. Тогда другое число будет $\overline{dcba}$ = 1000d + 100c + 10b + a. Сумма этих чисел будет равна 1001a + 110b+ 110c + 1001d. Так как после деления данной суммы на 143 получилось 136, то имеем уравнение: 1001(a + d) + 110(b + c) = 19448. Так как (b + c) не превосходит 18, а значит 110(b + c) не превосходит 1980. Тогда из уравнения получаем, что равенство возможно лишь при a = d = 9. Тогда имеем: 110(b + c) = 19448 – 18018, которое равносильно уравнению: b + c = 13. Перебором находим все возможные значения для букв b и c, соответственно получаем 6 вариантов четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию: 9949, 9859, 9769, 9679, 9589, 9499.

Ответ: 9949, 9859, 9769, 9679, 9589, 9499.

2. Представим левую часть уравнения в виде:

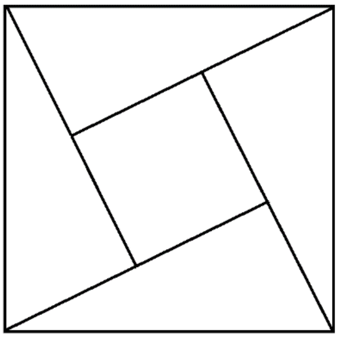
$$x^4 + 4x - 1 = \left(x^2\right)^2 + 2x^2 - 2x^2 + 1 - 1 + 4x - 1 =$$
$$= \left(x^2 + 1\right)^2 - (2x^2 - 4x + 2) = (x^2 + 1)^2 - ((\sqrt{2}(x-1))^2 =$$
$$= (x^2 + 1 - \sqrt{2}\,x + \sqrt{2})(x^2 + 1 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}).$$

Тогда исходное уравнение будет равносильно совокупности двух уравнений:
1) $x^2 - \sqrt{2}\,x + 1 + \sqrt{2} = 0$, которое не имеет корней, так как его дискриминант – отрицательный;

2) $x^2 + \sqrt{2}\,x + 1 - \sqrt{2} = 0$, которое имеет корни $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2}}$.

3.



Пусть катеты прямоугольных треугольников будут равны x и y, причем $x > y$. Тогда сторона маленького квадрата будет равна $x - y$. Соответственно, радиус окружности, вписанной в квадрат, будет равен $\frac{x-y}{2}$. Радиус же окружности, вписанной в треугольник с катетами x, y и гипотенузой 4, равен $\frac{x+y-4}{2}$. Формулу радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами x и y и гипотенузой, равной 4 см можно вывести. Так как $S_\Delta = \frac{xy}{2} = \frac{x+y+4}{2}r$, то $r = \frac{xy}{x+y+4} = \frac{xy\cdot(x+y-4)}{(x+y+4)(x+y-4)} = \frac{xy(x+y-4)}{x^2+y^2+2xy-16} = \frac{xy(x+y-4)}{16+2xy-16} = \frac{x+y-4}{2}$. Таким образом, мы получаем уравнение: $\frac{x-y}{2} = \frac{x+y-4}{2}$, из которого находим $y = 2$ (см). Но это означает, что меньший угол у каждого треугольника будет равен 30°, поэтому $x = 2\sqrt{3}$. Поэтому искомый радиус будет равен $\frac{2\sqrt{3}-2}{2} = \sqrt{3}-1$.

Ответ: $\sqrt{3}-1$.

4. Введем $a = sin1^\circ \cdot sin2^\circ \cdot sin3^\circ \cdot \ldots \cdot sin89^\circ$ и $b = \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 87^\circ \cdot \sin 89^\circ$. Тогда $\frac{a}{b} = sin2^\circ \cdot sin4^\circ \cdot sin6^\circ \cdot \ldots \cdot sin88^\circ$.

Применяя формулу двойного угла, получим:

$$\frac{a}{b} = 2^{44} \cdot sin1^\circ \cdot sin2^\circ \cdot sin3^\circ \cdot \ldots \cdot sin44^\circ \cdot cos1^\circ \cdot cos2^\circ \cdot cos3^\circ \cdot \ldots \cdot cos44^\circ.$$

Откуда находим:

$$b = \sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \cdot \ldots \cdot \sin 87^\circ \cdot \sin 89^\circ =$$

$$= \frac{a}{2^{44} \cdot \sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ \ldots \cdot \sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 89^\circ}{2^{44} \cdot \sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ \cdot \sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 44^\circ \cdot \cos 44^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 45^\circ \cdot \sin 46^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 89^\circ}{2^{44} \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 44^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 45^\circ \cdot \sin 46^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 89^\circ}{2^{44} \cdot \sin 89^\circ \cdot \sin 88^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 46^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2^{44}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{45}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2^{45}}$.

5. Поступаем следующим образом. Сначала положим на две чашки весов по 13 монет, потом по 11 из еще не бравшихся монет, затем – по 9, затем по 7; 5; 3; 1. Если во всех случаях было равновесие, то фальшивая монета – оставшаяся. Если при каком-то взвешивании одна из чашек перевесила, то фальшивая лежит в другой чаше. Рассмотрим, как ее определить. Если это случилось при первом взвешивании, то разбиваем 13 монет на пары и за 6 взвешиваний определяем фальшивую монету, положив на каждую из чаш весов по одной монете из каждой пары. Если при каком-то взвешивании равновесие нарушается, то более легкая монета и будет фальшивой, если же ни в одном взвешивании равновесие не нарушится, то оставшаяся без пары монета – фальшивая. Аналогично поступаем и в остальных случаях: когда равновесие нарушилось во второй, третий, четвертый, пятый или шестой раз. Если равновесие нарушилось в седьмой раз, когда на чашах лежало по одной монете, то более легкая монета будет фальшивой.