Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серьёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 учебном году
6 класс
Время выполнения заданий — 4 часа

6.1. *Как перевезти в лодке с одного берега на другой козла, капусту, двух волков и собаку, если известно, что волка нельзя оставлять без присмотра с козлом или собакой, собака в «ссоре» с козлом, а козёл «неравнодушен» к капусте? В лодке только три места (одно из них для лодочника), поэтому можно брать с собой не более двух животных или одно животное и капусту.*

Решение: Алгоритм такой.
1) Перевозим козла и собаку.
2) Возвращаемся с собакой.
3) Забираем обоих волков.
4) Возвращаемся с козлом.
5) Перевозим собаку и капусту.
6) Возвращаемся с собакой.
7) Перевозим собаку и козла.

Примечание: Первая и вторая перевозка строго единственна, также как и две последние. В середине допустима перестановка: третьим переездом взять собаку с капустой, на обратном пути взять козла, перевезти обоих волков.

Рекомендации по проверке:

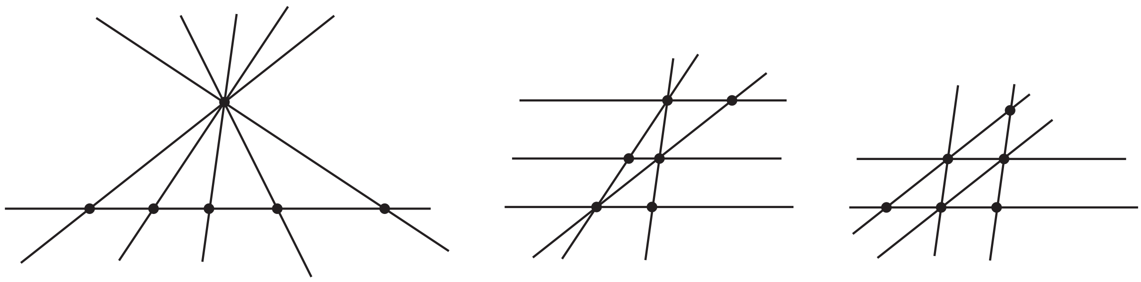
есть в работе	**баллы**
Верный алгоритм	7 баллов
Верно определены несколько (не менее двух) первых перевозок при этом полного алгоритма нет	2 балла
Полностью неверные алгоритмы и/или любые рассуждения, не приведшие к решению	0 баллов

6.2. *Можно ли провести на плоскости шесть прямых так, чтобы получилось ровно шесть точек пересечения? (Через точку пересечения могут проходить две или большее количество прямых). Ответ обоснуйте.*

Решение: Существует несколько способов выполнить задание. Три из них изображены на рисунке.

1) Через одну точку провести 5 прямых, а 6-ю — не параллельно ни одной из них и при этом не проходящую через указанную точку (левый рисунок).

2) Три прямые образуют треугольник, а три другие параллельны между собой и проходят через вершины треугольника (рисунок в центре).



К решению задачи 6.2

3) Три пары параллельных прямых проведены так, как указано на рисунке справа.

Ответ: Можно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верная конструкция (нарисованная или описанная словами)	7 баллов
Ответ без обоснования, а также неверные конструкции и/или рассуждения, не приведшие к верному решению	0 баллов

6.3. *У бабушки два клубка шерсти: большой и маленький. Из большого она может связать либо свитер и три носка, либо пять одинаковых шапочек. А из маленького — либо половину свитера, либо две шапочки. (При этом в обоих случаях вся шерсть будет израсходована.) Какое наибольшее число носков может связать бабушка, используя оба клубка? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. На половину свитера идёт столько же шерсти, сколько и на 2 шапочки, значит на свитер уходит столько же шерсти, как и на 4 шапочки. Тогда 4 шапочки и три носка требуют столько же шерсти, как и 5 шапочек. Поэтому одна шапочка равносильна трём носкам. Всего можно связать 5+2=7 шапочек или 21 носков.

Способ 2. Пусть на носок, шапочку и свитер уходит соответственно x, y и z шерсти (не важно, в каких единицах взяты неизвестные). Тогда шерсти у бабушки $3x + z = 5y$ в первом клубке и $0{,}5z = 2y$ — во втором. Требуется выразить сумму $5y + 2y$ через x. Выразим из второго уравнения z и подставим результат в первое: $3x + 4y = 5y$, откуда $y = 3x$. Тогда $5y + 2y = 7y = 21x$, то есть из всей шерсти можно связать 21 носков.

Ответ: 21 носков.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Ход решения полностью верен, но имеются вычислительные ошибки, возможно, приведшие к неверному ответу	6 баллов
Условие задачи верно записано через систему уравнений, но дальнейшее решение неверно или отсутствует	3 балла
Имеются верные логически обоснованные выводы о количествах шерсти, требующихся для носков, свитеров, шапочек, но они не привели к ответу	2 балла
Верный ответ без обоснования или с неверным обоснованием	1 балл
Неверный ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

6.4. *Гриб называется* плохим, *если в нём не менее* 10 *червей, и* хорошим *в противном случае. В корзине* 100 *плохих и* 11 *хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие? Ответ обоснуйте.*

Решение:

Способ 1. Предположим противное. Тогда из каждого плохого гриба должен уползти в хороший по крайней мере один червь. Всего в хорошие грибы переползёт не менее 100 червей. С другой стороны, в каждый хороший гриб не может приползти больше 9 червей, то есть всего переползёт не больше $11 \cdot 9 = 99$ червей. Противоречие.

Способ 2. Если все 111 грибов хорошие, то в них не более, чем $111 \cdot 9 = 999$ червей. Но если есть 100 плохих, то в них не меньше, чем $100 \cdot 10 = 1000$ червей. Значит, червей в корзине больше 999, и хорошими все грибы оказаться не могут.

Способ 3. Можно считать, что в каждом плохом грибе ровно 10 червей (если это не так, уберём «лишних» из корзины, ситуация только улучшится). Тогда всего в корзине $100 \cdot 10 = 1000$ червей. Согласно принципу Дирихле при любом их размещении по 111 грибам, найдётся гриб, в котором не меньше, чем $1000 : 111$ червей, то есть больше 9. Этот гриб, естественно, плохой. Значит, хорошими все грибы оказаться не могут.

Ответ: Нет, это невозможно.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Доказан один из двух пунктов: а) в корзине не менее 1000 червей; б) если все грибы — хорошие, то червей не более 999	3 балла
Верный ответ проиллюстрирован конкретными примерами (в любом количестве)	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

6.5. *Десять различных натуральных чисел таковы, что произведение любых пяти из них чётно, а сумма всех десяти — нечётна. Какова наименьшая возможная сумма всех этих чисел? Ответ обоснуйте.*

Решение: Нечётных чисел не больше четырёх (пять нечётных в произведении дают нечётное число), и, кроме того, их количество нечётно. Значит нечётных чисел 3 или 1, а чётных — 7 или 9. Такие наборы с наименьшей суммой — это 1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 и 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 соответственно. Последний набор даёт большую сумму, значит, нам подходит первый. Сумма чисел в нём равна 51.

Ответ: 51.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Верно и обосновано найден нужный набор, но неверно сосчитана сумма его чисел	6 баллов
Доказано, что количество нечётных чисел набора нечётно, но не все такие случаи верно исследованы.	3 балла
Ответ верный, приведён набор, реализующий этот ответ, но не доказана оптимальность приведённого примера	2 балла
Верный набор указан, но не доказана его оптимальность, а сумма чисел набора сосчитана с ошибкой	1 балл
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов