Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 учебном году

Ответы и решения

Общие положения

1) Максимальная оценка за каждую задачу — 7 баллов.

2) 7 баллов ставится за безукоризненное решение задач; 6 баллов означает, что в решении допущена мелкая погрешность, например, не разобран частный случай, не влияющий на решение. 4 или 5 баллов означают, что все идеи, необходимые для решения найдены, задачу в целом надо считать решённой, однако приведённое решение имеет существенные недостатки, например, в доказательстве ключевого факта имеются пробелы, устранимые не совсем очевидным образом. 2 — 3 балла ставится, если в решении задачи имеется серъёзное продвижение, однако для решения необходимы дополнительные идеи, не указанные в решении. 1 балл означает, что в решении имеется только очень мелкое продвижение, как то: замечен, но не доказан ключевой факт, разобран нетривиальный частный случай или приведён (но не обоснован) верный ответ, который не вполне тривиален. Если приведённые в решении факты, идеи, выкладки к решению явным образом не ведут, то задача оценивается в 0 баллов, также как и в случае, когда решение задачи отсутствует.

3) В случае наличия в одной работе нескольких решений оценивается ровно одно решение, то, которое приносит больше баллов. За другие решения баллы не снимаются и не начисляются.

4) Оценка за задачу не может быть снижена за неаккуратный почерк, ошибки в русском языке, или явные описки в выкладках. Также недопустимо снижение баллов за не чёткий чертёж в геометрической задаче или даже за отсутствие такового. Нельзя требовать с участника олимпиады, чтобы он переписывал условие задачи, в том числе не обязательна краткая запись условия геометрических задач.

5) Школьник имеет право сам выбрать способ решения той или иной задачи; не допускается снижать оценку за то, что выбранный школьником способ решения не самый лучший или отличается от предложенных нами способов.

6) Факты и теоремы школьной программы (в том числе и те, которые приведены только в задачах школьных учебников) следует принимать без доказательств. Школьник имеет право без доказательства использовать любые такие факты, даже если они проходятся в более старших классах. Допускается (также без доказательств) использование математических фактов, изучающихся на факультативах. В частности, без ограничения можно применять формулы аналитической геометрии, математического анализа, принцип математической индукции, теоремы теории графов и т.п.

7) Критерии оценки, приведённые в прилагаемых решениях (таблица в конце решения каждой задачи) являются обязательными и не могут быть изменены. Однако это не означает, что выставляемые за задачу баллы обязательно должны совпасть с приведёнными в таблице: в случае, когда жюри вырабатывает дополнительные критерии (см. следующий пункт) жюри может выставить балл, которого в таблице нет (например, в таблице предусмотрены только 0 и 7 баллов, а

жюри выставляет 5 баллов). Таблицы критериев составлены таким образом, что перечисляют отдельные случаи; накопление баллов за разные пункты не предусмотрено.

8) В случае, если решение школьника принципиально отличается от решений, предложенных программным комитетом, и не может быть подведено под предлагаемые критерии, проверяющие вырабатывают критерии самостоятельно в соответствии с пунктом 2.

9) В случае возникновения спорных ситуаций при проверке работ олимпиады жюри вправе обратиться за разъяснениями и советом к составителям пакета заданий: д.ф-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину и к.ф-м.н. наук Сергею Эрнестовичу Нохрину (адрес эл.почты **varyag2@mail.ru**, тел. +**79220350324**).

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018 – 2019 учебном году

7 класс

Время выполнения заданий — 4 часа

7.1. *В выражении* $5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 0$ *замените звёздочки на знаки четырёх арифметических действий (взяв каждый знак ровно по одному разу), чтобы равенство стало верным. Другие знаки, в том числе скобки, использовать нельзя.*

Решение: **Ответ:** $5 - 4 \cdot 3 : 2 + 1 = 0$.

Примечание: Приведённый пример — не единственно возможный. Для полного решения достаточно одного (любого) верного примера.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верно заменены звёздочки	7 баллов
Решения, не удовлетворяющие условию (например, использующие скобки)	0 баллов

7.2. *Петя и Боря произвели по пять выстрелов в одну мишень, попав в «5» — один раз, в «7» — два раза, в «8» — один раз, в «9» — два раза, в «10» — два раза, в «11» — один раз, в «12» — один раз. Четырьмя последними выстрелами Петя выбил в 7 раз больше очков, чем первым. Известно, что и Петя, и Боря попали в «10». Кто из них попал в «12»? Ответ обоснуйте.*

Решение: Имеем, что последними четырьмя выстрелами Петя выбил не больше, чем $12 + 11 + 10 + 9 = 42$, значит, первым — не больше, чем $42 : 7 = 6$. Тогда его первый выстрел пришёлся в «пятёрку», а четыре последних в сумме дали 35. При этом была ровно одна «десятка», так что тремя оставшимися выбито 25. Это можно сделать двумя способами: $7+9+9$ и $7+7+11$. В обоих случаях в 12 попал Боря.

Примечание: Приведённое рассуждение не единственно возможное.

Ответ: Боря.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Приведён пример, показывающий, как могла сложиться стрельба, но не обосновано, что Петя попасть в «12» не мог	2 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

7.3. («Нас выбирают, мы выбираем»). *Трое юношей — Коля, Петя и Юра — влюблены в трёх девушек: Таню, Зину и Галю. Но, хотя Таня, Зина и Галя тоже влюблены в Колю, Петю и Юру, любовь оказалась без взаимности. Коля любит девушку, влюблённую в юношу, который любит Таню. Петя любит девушку, влюблённую в юношу, который любит Зину. Зина не любит Юру. Определите, кто в кого влюблён. При этом помните, что каждый из указанной шестёрки влюблён только в одного человека. Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

Решение: Так как любовь без взаимности, то все привязанности идут по циклу Ю1 — Д1 — Ю2 — Д2 — Ю3 — Д3 — Ю1 (здесь Ю и Д — юноша и девушка соответственно). Без ограничения общности, пусть Ю1 — Коля. Тогда Д2 — Таня. Если теперь Ю3 — Петя, то Д1 — Зина, а Ю2 — Юра. В этом случае Зина любит Юру — противоречие. Значит, Ю3 — Юра, а Ю2 — Петя. Тогда Д3 — Зина, а Д1 — Галя. Значит, Коля любит Галю, которая любит Петю, который любит Таню, которая любит Юру, который любит Зину, которая любит Колю.

Примечание: Приведённое рассуждение не единственно возможное. Например, вполне допустимо решение таким перебором случаев (первые два приводят к противоречию): 1) Коля любит Таню; 2) Коля любит Зину; 3) Коля любит Галю.

Ответ: Коля любит Галю, Галя — Петю, Петя — Таню, Таня — Юру, Юра — Зину, Зина — Колю.

Рекомендации по проверке:

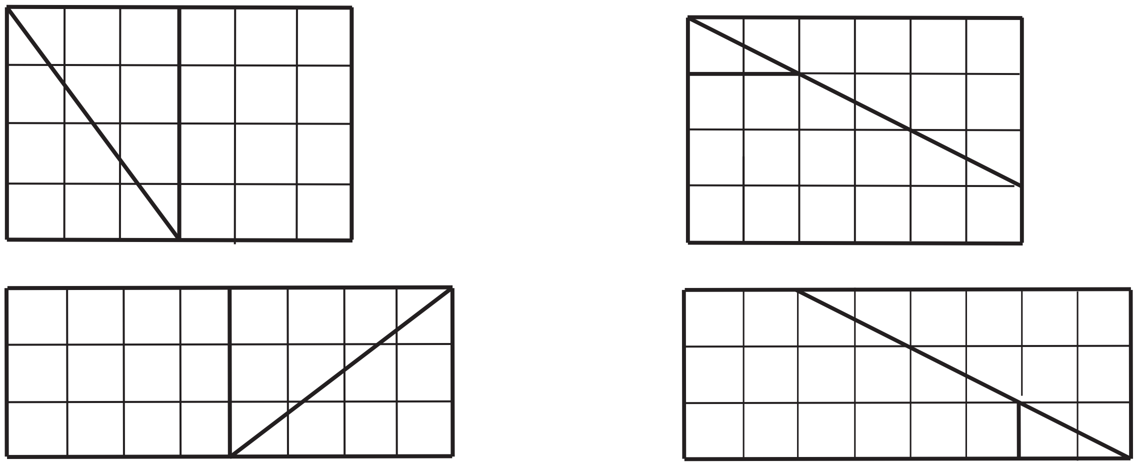
есть в работе	баллы
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Решение перебором нескольких случаев, но перебор не полон	3 балла
Верный ответ без обоснования, возможно, с демонстрацией того, что он не противоречит условию	2 балла
Неверный ответ	0 баллов

7.4. *У Лены есть два треугольника и четырёхугольник, а у Васи — два треугольника (отличных от треугольников Лены) и пятиугольник (все фигурки выпилены из листа фанеры). Оба они утверждают, что могут сложить из своих фигур как прямоугольник 4×6, так и прямоугольник 3×8.*

а) Может ли оказаться, что Лена права?

б) Может ли оказаться, что Вася прав?

Решение: а) Лена может оказаться правой. б) Вася тоже может быть прав. Возможные конструкции приведены на рисунке.



конструкция Лены конструкция Васи

К решению задачи 7.4

Ответ: Правыми могут быть оба.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Приведены обе конструкции (и Лены и Васи).	7 баллов
Приведена только конструкция Васи	4 балла
Приведена только конструкция Лены	3 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов
Если при верном наборе многоугольников не показано, как из них складывается прямоугольник	−1 балл за каждый прямоугольник

7.5. *В некотором треугольнике провели один отрезок. Оказалось, что на получившемся чертеже можно увидеть все известные Вам виды треугольников: равносторонний, равнобедренный, разносторонний, прямоугольный, остроугольный, тупоугольный.*

а) Приведите пример такого треугольника и проведённого в нём отрезка.

б) Определите, какие значения могут принимать углы такого треугольника. Приведите все варианты ответа и докажите, что других нет.

Решение: Решим сразу пункт б). После проведения одного отрезка в треугольнике получатся либо 2 либо 3 треугольника. При этом 3 — только в случае, если отрезок соединяет вершину с точкой стороны. Так как должны быть прямоугольный, остроугольный и тупоугольный треугольники, именно этот последний случай и должен иметь место. При этом проведённый отрезок не может быть высотой (возникают 2 прямоугольных треугольника). Остаётся 2 варианта. 1) Был тупоугольный треугольник, и из вершины тупого угла провели отрезок, делящий тупой угол на прямой и острый. Но тогда не возникнет остроугольного треугольника. 2) Был прямоугольный треугольник. Тогда чтобы возник правильный необходимо, чтобы один из его углов равнялся 60°, а проведённый отрезок является медианой, выходящей из прямого угла. Такая ситуация нас устраивает.

Ответ: б) 90°, 30° и 60°.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный пример треугольника и верное доказательство того, что треугольников с другими углами нет	7 баллов
Не обосновано, что проведённый отрезок соединяет вершину с точкой противоположной стороны	баллы не снижаются
Верно выполнены два пункта из трёх (см. критерии на 2 балла)	4 балла
Верно выполнен один из пунктов: 1) приведён верный пример треугольника и показано, какой отрезок в нём проведён; 2) обосновано, что исходный треугольник не может быть остроугольным; 3) обосновано, что исходный треугольник не может быть тупоугольным	2 балла
Ответ без обоснования и/или неверный ответ	0 баллов

7.6. *Натуральные числа m и n таковы, что $88m = 81n$. Докажите, что число $m+n$ — составное.*

Решение: Число $88(m+n) = 88m+88n = 81n+88n = 169n$ делится на $169 = 13^2$. Так как числа 88 и 13 взаимно просты, на 13^2 делится число $m+n$, являясь, таким образом, составным.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный и полностью обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что $m+n$ делится на 13 и не доказана невозможность случая $m+n=13$	5 баллов
Утверждение задачи проиллюстрировано на конкретных примерах (в любом количестве)	0 баллов