Математика, 7 класс, муниципальный этап

Общие принципы проверки и оценивания олимпиадных работ

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор одного из случаев методом, позволяющим решить задачу в целом, доказательство леммы, используемой в одном из доказательств, нахождение примера или доказательства оценки в задачах типа «оценка + пример» и т.п.). Наконец, возможны как существенные, так и не влияющие на логику рассуждений логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать все вышеперечисленное.

В соответствии со стандартными правилами проведения математических олимпиад школьников ***каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7***.

Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже будут приведены критерии к предложенным задачам олимпиады (локальные критерии), содержащие указания к оцениванию (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Такие локальные критерии по отдельным задачам имеют более высокий приоритет по отношению к универсальным критериям: к примеру, если в универсальных критериях за рассмотрение одного из двух случаев сказано, что это оценивается в 4 балла, а в локальных критериях к задаче – что в 2 балла, то баллы выставляются в соответствии с локальными критериями.

Важно отметить, что любое правильное (!) решение оценивается в 7 баллов.

Оценивается только математическая правильность, корректность, полнота решения; баллы не снижаются за «недостаточную» красоту, оптимальность решения, за исправления и помарки (позволяющие прочитать и оценить текст работы. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Все решения, если не указано противное, требуют обоснования.
Если решения не совпадают с приведенными, читайте внимательно!

Максимально за все задания олимпиады – 35 баллов.

№ задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Всего**
Баллы	7	7	7	7	7	**35**

Решения, критерии и указания по проверке

1. Число называется хорошим, если в нем нет одинаковых цифр и при этом оно делится на сумму своих цифр. Придумайте хотя бы два хороших двузначных числа, которые после увеличения каждой своей цифры на 1 остаются хорошими.

Решение:

Например, число 10 (оно делится на 1 + 0, а число 21 делится на 2 + 1) и число 70 (оно делится на 7 + 0, а число 81 делится на 8 + 1).

Критерии:
Найдено одно хорошее число – 3 балла, два числа – 7 баллов.

2. Агроном Бильбо заметил, что если бы длина его прямоугольного поля была больше на 20 метров, то периметр поля был бы больше в 2 раза. А вот если бы ширина поля была больше в 2 раза, то периметр поля был бы больше на 18 метров. Чему равна площадь поля?

Ответ: 99 $м^2$.

Решение:

Способ № 1.

Если ширина поля увеличилась в 2 раза, то к периметру просто прибавилась два раза ширина поля, но по условию задачи это изменение равно 18 *метрам* – значит, ширина поля равна 9 *метрам*. При увеличении длины на 20 *метров* периметр поля увеличится на 40 *метров*, но (по условию) это изменение равно периметру поля (так как периметр увеличился вдвое). Стало быть, периметр поля равен 40 *метров*. Тогда длина и ширина в сумме составляют 20 *метров*, а ширина равна 9 *метрам*, поэтому длина равна 11 *метрам*, а площадь – 9 · 11 = 99 ($м^2$).

Способ № 2.

По сути, то же самое, но с буквенными обозначениями. Пусть длина поля равна x, а ширина поля равна y. Тогда периметр равен $2x+2y$. При увеличении длины поля на 20 *метров* получается прямоугольник с длиной $x+20$ и шириной y, его периметр равен $2(x+20)+2y$, по условию это равно $2(2x+2y)$.

Получили уравнение: $2(x+20)+2y=2(2x+2y)$, откуда $2x+2y=40$, тогда $x+y=20\,(м)$.

При увеличении ширины исходного поля в 2 раза получаем прямоугольное поле с длиной x, шириной $2y$ и периметром $2x+4y$, что по условию равно $2x+2y+18$.

Из уравнения $2x+4y=2x+2y+18$ получаем, что $2y=18, y=9$ (*метров*).

Тогда $x=(x+y)-y=20-9=11$ (*метров*), а площадь равна 9 · 11 = 99 ($м^2$).

Критерии:
Верный ответ без обоснования и без примера подходящей длины и ширины – ставить 1 балл.
Верный ответ без обоснования, но с указанием, при какой длине и ширине он получается, – ставить 2 балла.

3. В клетки таблицы 3×3 вписывают числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. После этого в тетрадь выписали все возможные суммы чисел, стоящих в соседних (по стороне) клетках. Какое наименьшее количество разных чисел могло быть среди выписанных в тетрадь?

Решение:

Рассмотрим число, которое стоит в центральной клетке таблицы. Рядом с ним 4 разных соседа – они дают с центральным числом 4 разные суммы, поэтому различных выписанных сумм уже не меньше 4. Пример, когда их ровно 4, существует (справа один из них, суммы равны 8, 9, 10, 11) .

9	2	6
1	7	4
8	3	5

<u>**Критерии**</u>:

Есть пример на 4 разные суммы (проверять!) – 2 балла.
Есть оценка – то есть обоснование, почему не получится меньше 4 разных сумм, – 3 балла.
Есть и верная оценка, и верный пример – 7 баллов.

4. В парламенте Анчурии какие-то депутаты враждуют (причем у каждого есть хотя бы один враг), какие-то дружат, а некоторые безразличны друг другу. Дружба, вражда и безразличие взаимны, причем для каждого депутата работает принцип: «Друг моего врага является и моим врагом». Докажите, что у какого-то депутата врагов больше, чем друзей.

Решение:

Возьмем любого депутата. По условию у него есть хотя бы один враг – выберем любого врага. Из этих двух враждующих депутатов именем *А* назовем того, у кого больше друзей, а другого депутата назовем *Б* (если у них поровну друзей, то без разницы, кто из них *А*, а кто *Б*). Если у депутата *А* врагов больше, чем друзей, то мы нашли такого депутата (из утверждения задачи). Если же у депутата *А* врагов не больше, чем друзей, то обозначим количество его друзей через *X*. Тогда у депутата *Б* друзей не больше *X* (из этих двух депутатов мы договорились называть именем *А* того, у кого друзей не меньше), но при этом его врагами точно являются все друзья депутата *А* (их ровно *X*), да еще и сам депутат *А* (итого уже $X + 1$), а может кто-то еще (можно игнорировать, потому что у *Б* уже насчитали больше *X* врагов). Итак, здесь у депутата *Б* не больше *X* друзей, но больше *X* врагов, – тогда депутат *Б* подходит под утверждение задачи.

<u>***Критерии:***</u>

Есть идея рассмотрения пары врагов и выбора депутата, у которого друзей не меньше, чем у его врага (как варианты – рассмотрение депутата с самым большим количеством друзей), но дальнейших содержательных продвижений нет, – 2 балла.
Доказано, что у какого-то депутата врагов не меньше, чем друзей (т.е. доказано нестрогое неравенство вместо строгого – например, в приведенном выше решении при рассмотрении Б забыли, что А его враг), а остальное все верно, – ставить 4 балла.

5. Робот Валли печатает числа. Если последнее напечатанное число четное, то после него Валли напечатает половину этого числа, а если нечетное – сначала прибавит к числу 1001, разделит эту сумму пополам и напечатает результат. Первым было напечатано число 1. Верно ли, что когда-то среди напечатанных чисел встретятся все натуральные числа от 1 до 100?

Ответ: неверно.

Решение:

Первый способ.

Заметим, что если четное число n не делится на 7, то не делится на 7 и число $n / 2$, а если на 7 не делится нечетное число n, то не делится на 7 и число $n + 1001$ (ибо число 1001 делится на 7), а тогда и число $(n + 1001) / 2$. Таким образом, если напечатанное число не делится на 7, то и следующее напечатанное число не будет делиться на 7. Поскольку первоначальное число 1 не делится на 7, то на доске не будет ни одного числа, делящегося на 7.

Второй способ.

Если аккуратно проделать действия за Валли (ключевое слово – «если»), то 61-м напечатанным числом будет снова число 1, а это значит, что дальше числа будут повторяться. Получается, что напечатано будет не более 60 различных чисел, а тогда некоторые из чисел от 1 до 100 (их больше 60) не напечатаны.

Критерии:

Верный ответ (что утверждение неверно) без верного обоснования – 0 баллов.

Аргумент, что когда-нибудь числа будут повторяться, требует обоснования (например, аккуратно проделанных арифметических действий в соответствии с условием задачи – как минимум, должны быть выписаны эти 60-61 число) – отсутствие этого обоснования (если решение основано на этой идее) делает решение неверным, 0 баллов.

Аргумент, что числа всегда будут не кратными 7 (как вариант – не кратными 11, не кратными 13, …) также требует обоснования, алгоритм выставления баллов тот же.

Аргумент, что числа быстро станут «очень большими» (больше 100), и поэтому не будут напечатаны числа от 1 до 100, просто неверен, 0 баллов.